المتميز

فى

الرياضيات التطبيقية

الأستاتيكا

الجزء النظرى

و

حلول التمارين

الوحدة الأولى

م س ر | ج و | (س م ، ص م) | || ق ||

إعداد : أحمد الشنتورى

الصف الثالث الثانوى

القسم العلمى

شعبة الرياضيات

٢٠١٧ / ٢٠١٨

الوحدة الأولى .... الاحتكاك

١ – ١ اتزان جسم على جسم مستوى أفقى خشن

تمهيد :

نعلم أن هناك العديد من أنواع القوى مثل : قوة رد الفعل ، و قوة الوزن (أو التثاقل) ، و قوى الشد ، و قوى الضغط ، ....
هناك أيضاً قوى تنشأ بين الأجسام (الساكنة أو المتحركة) تسمى قوى الاحتكاك التى بدونها تكون الحياة مستحيلة فلولا وجود قوى الاحتكاك لما استطاع الانسان أن يحفظ توازنه ، فأنت عندما تسير تحاول أن تدفع الأرض إلى الوراء بقوة ، و هى بالمقابل تقوم برد فعل على قدميك فتدفعك للأمام و بذلك تستطيع الانتقال من موضع لآخر ، بينما من الصعب أن تسير على الجليد لأنه سطح أملس لا يسبب احتكاكاً ، و للاحتكاك فوائد عديدة أخرى

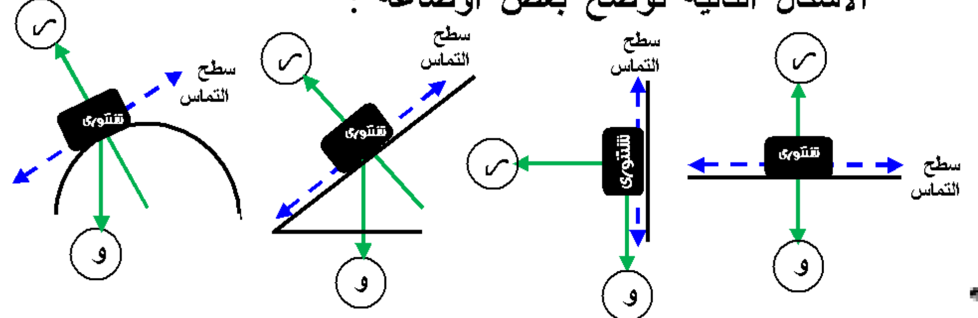
رد الفعل :

رد الفعل هو قوة تنشأ عند تلامس جسمين
فإذا وضع جسم على نضد فإن :
النضد يؤثر على الجسم بقوة تسمى
رد فعل النضد على الجسم (ر)
كما يؤثر الجسم على النضد بقوة مضادة
تسمى ضغط الجسم على النضد (ض) ، و
القوتان متساويتان فى المقدار (ر = ض) و متضادتان فى الاتجاه

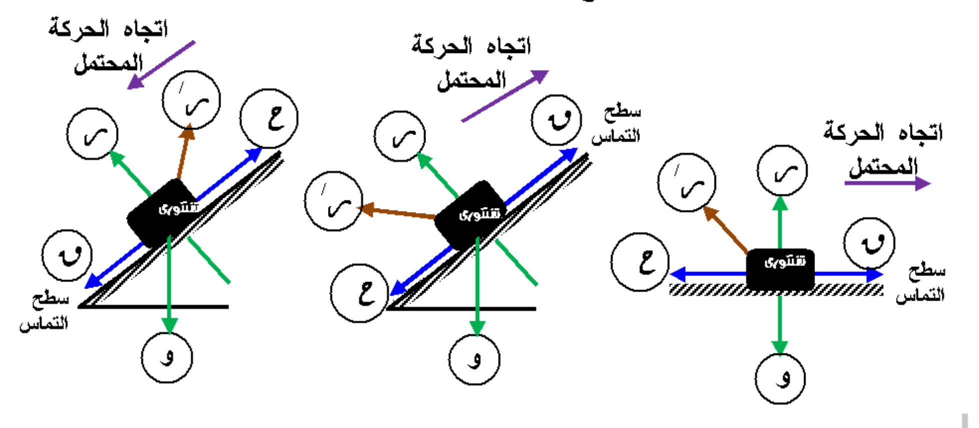
ملاحظات :

(١) يتوقف رد الفعل على طبيعة الجسمين المتلامسين ، كما يتوقف على القوى المؤثرة الأخرى على الجسم

(٢) فى حالة السطوح الملساء يكون رد الفعل عمودياً على سطح التماس المشترك للجسمين المتلامسين و يسمى رد الفعل العمودى
الأشكال التالية توضح بعض أوضاعه :



(٣) فى حالة السطوح الخشنة يكون رد الفعل مائلاً على سطح التماس و يسمى رد الفعل المحصل و يرمز له بالرمز (ر′)
بحيث يمكن تحليلها إلى مركبتين متعامدتين :
الأولى عمودية على سطح التماس هى قوة رد الفعل (ر)
الثانية موازية لسطح التماس تسمى قوة الاحتكاك السكونى و يرمز له بالرمز (ح)
الأشكال التالية توضح بعض أوضاعه :



قوة الاحتكاك السكونى :

هى قوة خفية تظهر عند محاولة تحريك جسم على سطح خشن (الجسم على وشك الحركة)
أو عند انزلاق سطحين متلامسين خشنيين (يكونا على وشك الحركة)
فإذا وضع جسم مقدار وزنه (و) على مستوى أفقى خشن و أثرت عليه قوة أفقية مقدارها (ق) فإنه تظهر قوة خفية تقاوم حركته تسمى قوة الاحتكاك السكونى (ح) تعمل فى اتجاه مضاد لاتجاه القوة التى مقدارها (ق) فإذا لم تكن القوة التى مقدارها (ق) كافية لتحريك الجسم فإن الجسم يكون متزناً تحت تأثير :

(١) قوة الوزن و مقدارها (و) ، و قوة رد الفعل العمودى و و مقدارها (ر) حيث : و = ر
(٢) القوة الأفقية و مقدارها (ق) ، و قوة الاحتكاك السكونى و و مقدارها (ح) حيث : ق = ح

خواص الاحتكاك السكونى :

[١] تعمل قوة الاحتكاك السكونى (ح) على معاكسة الانزلاق فتكون فى اتجاه مضاد للاتجاه الذى يميل الجسم إلى الانزلاق فيه
[٢] تكون قوة الاحتكاك السكونى (ح) مساوية فقط للقوة المماسة التى تعمل على تحريك الجسم و لا يمكن أن تزيد عن هذه القوة
[٣] تتزايد قوة الاحتكاك السكونى (ح) كلما تزايدت القوة المماسة التى تعمل على إحداث الحركة فتكون دائماً مساوية لها فى المقدار مادام الجسم متزناً
[٤] تتزايد قوة الاحتكاك السكونى (ح) إلى حد لا تتعداه و عند ذلك يكون الجسم على وشك الانزلاق و يسمى الاحتكاك فى هذه الحالة بالاحتكاك السكونى النهائى و يرمز له بالرمز ($\text{ح}_{\text{س}}$) أى أن :

قوة الاحتكاك السكونى النهائى :

هى قوة الاحتكاك عندما يصل مقدار الاحتكاك إلى قيمته النهائية (العظمى) و التى يكون عندها الجسم على وشك الحركة

[٥] النسبة بين الاحتكاك السكونى النهائى و رد الفعل العمودى ثابتة و تتوقف على طبيعة الجسمين المتلامسين و ليس على شكليهما أو كتلتهما و تسمى هذه النسبة بمعامل الاحتكاك السكونى و يرمز له بالرمز ($\text{م}_{\text{س}}$) أى أن :

معامل السكونى النهائى :

هو النسبة بين قوة الاحتكاك السكونى النهائى ($\text{ح}_{\text{س}}$) و رد الفعل العمودى (ر) و بالتالى يكون : $\text{م}_{\text{س}} = \frac{\text{ح}_{\text{س}}}{\text{ر}}$
و منها : $\text{ح}_{\text{س}} = \text{م}_{\text{س}}\,\text{ر}$

ملاحظات :

(١) معاملات الاحتكاك السكونى فى أغلب الأحيان يكون فيها : $0 < \text{م}_{\text{س}} < 1$ " الصحيح " إلا أنه فى بعض الحالات الخاصة قد تزيد عن الواحد الصحيح
(٢) المتساوية : $\text{ح}_{\text{س}} = \text{م}_{\text{س}}\,\text{ر}$ تتحقق فقط عند الاحتكاك السكونى النهائى أى عندما يكون الجسم على وشك الحركة و هى أقصى قيمة للاحتكاك السكونى (ح) أى : $0 \le \text{ح} \le \text{م}_{\text{س}}\,\text{ر}$
(٣) إذا كان الجسم ساكناً فإن : $\text{ح} \le \text{م}_{\text{س}}\,\text{ر}$
(٤) تنعدم قوى الاحتكاك فى السطوح الملساء تماماً و يكون معامل الاحتكاك = صفراً

قوة الاحتكاك الحركى :

إذا تحرك جسم على سطح خشن فإنه يخضع لقوة احتكاك حركى ($ع_{ك}$) يكون اتجاهه عكس اتجاه حركته و تعطى قيمتها بالعلاقة :

$ع_{ك} = م_{ك}\ ر$ حيث :

$م_{ك}$ هو معامل الاحتكاك الحركى ، $ر$ رد الفعل العمودى

أى أن : قوة الاحتكاك الحركى تساوى حاصل ضرب معامل الاحتكاك الحركى فى قوة رد الفعل العمودى

و من ذلك يمكن تعريف معامل الاحتكاك الحركى بأنه النسبة بين قوة الاحتكاك الحركى و قوة رد الفعل العمودى أى أن : $م_{ك} = \frac{ع_{ك}}{ر}$

ملاحظة :

قوة الاحتكاك النهائى للأجسام الساكنة أكبر من قوة الاحتكاك للأجسام المتحركة أى أن : $ع_{س} > ع_{ك}$ و بالتالى يكون : $م_{س} > م_{ك}$

رد الفعل المحصل :

فى حالة السطوح الخشنة فإن رد الفعل المحصل يكون مائلاً على سطح التماس حيث أنه يعتبر محصلة رد الفعل العمودى و قوة الاحتكاك السكونى و يسمى أيضاً برد الفعل الكلى

أى أن : الفعل المحصل ($\overline{ر'}$) هو محصلة رد الفعل ($\overline{ر}$) و قوة الاحتكاك السكونى ($\overline{ع}$) و بالتالى يكون :

$(ر')^2 = (ر)^2 + (ع)^2$ أى : $ر' = \sqrt{ر^2 + ع^2}$

و فى حالة الاحتكاك السكونى النهائى يكون : $ر' = \sqrt{ر^2 + ع_{س}^2}$

، $\because ع_{س} = م_{س}\ ر \quad \therefore ر' = \sqrt{ر^2 + م_{س}^2\ ر^2}$

$\therefore ر' = ر\sqrt{1 + م_{س}^2}$

زاوية الاحتكاك :

إذا كان : $ل$ هو قياس الزاوية المحصورة بين رد الفعل العمودى و رد الفعل المحصل فإنه يلاحظ أن قيمة $ل$ تتزايد كلما تزايد مقدار الاحتكاك (بفرض ثبوت مقدار قوة رد الفعل العمودى) و أن هذه القيمة تصل إلى نهايتها العظمى عندما يصبح الاحتكاك نهائياً و تسمى الزاوية في هذه الحالة : (زاوية الاحتكاك) أى أن :

زاوية الاحتكاك :

هى الزاوية المحصورة بين قوة رد الفعل المحصل و قوة رد الفعل عندما يصل مقدار قوة الاحتكاك إلى قيمته العظمى

و يكون : $طا\ ل = \frac{ع_{س}}{ر}$ ، $\because م_{س} = \frac{ع_{س}}{ر}$

$\therefore$: $طا\ ل = م_{س}$ أى أن :

ظل زاوية الاحتكاك = معامل الاحتكاك السكونى

ملاحظة :

$\because ر' = ر\sqrt{1 + م_{س}^2}$ ، $طا\ ل = م_{س}$ ،

$1 + طا^2\ ل = قا^2\ ل \quad \therefore ر' = ر\ قا\ ل$

إجابة تفكير ناقد صفحة ٧

قارن بين قياس زاويتى الاحتكاك السكونى و الاحتكاك الحركى

الحل

$\because م_{س} > م_{ك}$ $\therefore$ ظل زاوية الاحتكا السكونى > ظل زاوية الاحتكاك النهائى

$\therefore$ قياس زاوية الاحتكا السكونى > قياس زاوية الاحتكاك النهائى

اتزان جسم على مستوى أفقى خشن :

إذا وضع جسم وزنه (و) على مستوى أفقى خشن و أثرت عليه قوة مقدارها (ق) تميل على الأفقى بزاوية قياسها (θ)

فإن : الجسم فى وضع التوازن يكون متزناً تحت تأثير القوى :

(١) قوة الوزن ($\overline{\text{و}}$) رأسياً لأسفل و مقدارها (و)

(٢) قوة رد الفعل المحصل ($\overline{\text{ر}'}$) و مقدارها (ر')

(٣) القوة ($\overline{\text{ق}}$) و مقدارها (ق)

و الشكل المقابل يوضح ذلك

و بتحليل القوة ($\overline{\text{ق}}$) إلى مركبتين فى الاتجاه الأفقى و الاتجاه العمودى عليه فإن مقدارها يكون : ق حتا θ ، ق حا θ

، و بتحليل ($\overline{\text{ر}'}$) إلى مركبتين متعامدتين هما رد الفعل العمودى ($\overline{\text{ر}}$) و مقدارها (ر) ، و قوة الاحتكاك ($\overline{\text{ح}}$) و مقدارها (ح)

و الشكل المقابل يوضح ذلك

فتكون معادلتا اتزان الجسم هما :

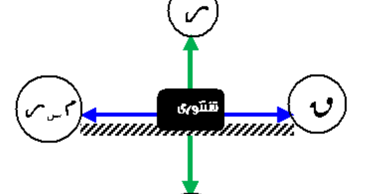
ح = ق حتا θ ، ر + ق حا θ = و

إجابة حاول أن تحل (١) صفحة ٨

وضعت كتلة وزنها ٣٢ نيوتن على مستوى أفقى خشن و أثرت عليها قوة أفقية ق حتى أصبحت الكتلة على وشك الحركة

(أ) إذا كانت : ق = ٨ نيوتن أوجد معامل الاحتكاك السكونى بين الكتلة و المستوى

(ب) إذا كان : $م_س$ = ٠,٤ أوجد ق



الحل

∵ الكتلة على وشك الحركة

∴ ر = ٣٢ ، ق = $م_س$ ر

(أ) ∵ ق = ٨ نيوتن ∴ $م_س$ ر = ٨

∴ $م_س$ × ٣٢ = ٨ و منها : $م_س$ = $\frac{٨}{٣٢}$ = $\frac{١}{٤}$

(ب) ∵ $م_س$ = ٠,٤ ∴ ق = ٣٢ × ٠,٤ = ١٢,٨ نيوتن

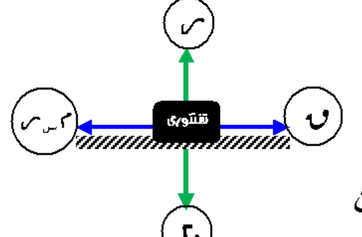
إجابة حاول أن تحل (٢) صفحة ٩

وضع جسم مقدار وزنه ٢٠ نيوتن على مستوى أفقى خشن فإذا كان معامل الاحتكاك السكونى بين الجسم و المستوى $\frac{١}{٤}$ أوجد :



(أ) مقدار القوة الأفقية التى تكفى لجعل الجسم على وشك الحركة

(ب) القوة التى تميل على المستوى بزاوية قياسها ٣٠° و تجعل الجسم على وشك الحركة



الحل

(أ) ∵ الجسم على وشك الحركة

∴ $ر_١$ = ٢٠

، ق = $م_س$ $ر_١$ = $\frac{١}{٤}$ × ٢٠ = ٥ نيوتن

(ب) ∵ الجسم على وشك الحركة

∴ ق حتا ٣٠° = م س ر

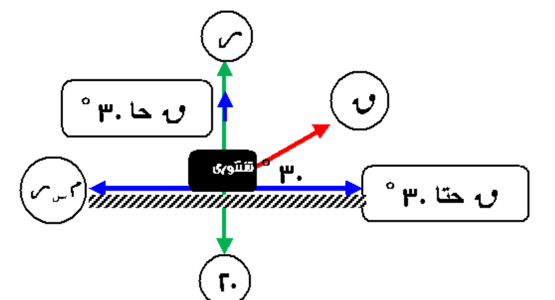
∴ ق × √٣ / ٢ = ١/٤ ر

∴ ر = ٢ √٣ ق

، ر + ق حا ٣٠° = ٢٠

∴ ر + ق × ١/٢ = ٢٠

∴ ٢ √٣ ق + ق × ١/٢ = ٢٠ ∴ ق = ٢٠ / (٢ √٣ + ١/٢) = ٥,٠٥ نيوتن



إجابة حاول أن تحل (٣) صفحة ٩

وضع جسم مقدار وزنه ٦ نيوتن على مستوى أفقى خشن و أثرت عليه فى نفس المستوى قوتان مقدارهما ٢ ، ٤ نيوتن تحصران بينهما زاوية قياسها ١٢٠° فظل ساكناً ، أثبت أن قياس زاوية الاحتكاك (ل) بين الجسم و المستوى يجب ألا تقل عن ٣٠°

و إذا كانت ل = ٤٥° و بقى اتجاه القوتين ثابتاً كما بقيت القوة ٤ نيوتن دون تغيير ، فعين مقدار القوة الأخرى لكى يكون الجسم على وشك الحركة

الحل

القوى المستوية و المتزنة (ق ، ٤ ، ٢) نيوتن

تكون : ق محصلة ٤ ، ٢ حيث :

ق² = ١٦ + ٤ + ٢ × ٤ × ٢ × حتا ١٢٠°

= ١٢ ∴ ق = ٢ √٣ نيوتن

، ∵ الجسم ساكن

∴ ع = ق = ٢ √٣ ، ر = ٦

، ع ≤ م س ر ∴ ٢ √٣ ≤ م س × ٦

∴ م س ≥ ١ / √٣ ∴ طا ل ≥ ١ / √٣

∴ قياس زاوية الاحتكاك يجب ألا تقل عن ٣٠°

، عندما : ق (∠ ل) = ٤٥° ، بقيت القوة ٤ نيوتن دون تغيير

نفرض أن : القوة الأخرى = ك ، محصلتهما = ق

∴ ق² = ١٦ + ك² + ٢ × ٤ × ك × حتا ١٢٠°

، ليكون الجسم على وشك الحركة يجب أن يكون : ق = م س ر

أى : ق² = (م س ر)² = (طا ٤٥° × ر)² = (١ × ٦)² = ٣٦

∴ ١٦ + ك² + ٢ × ٤ × ك × حتا ١٢٠° = ٣٦

∴ ١٦ + ك² − ٤ ك = ٣٦ ∴ ك² − ٤ ك − ٢٠ = ٠

∴ ع = (١ ± √(١٦ − ٤ × ١ × (−٢٠))) / (٢ × ١) = (٤ ± √٩٦) / ٢ = (٤ ± ٤ √٦) / ٢

= ٢ + ٢ √٦ ، و يرفض الحل الآخر

إجابة حاول أن تحل (٤) صفحة ١١

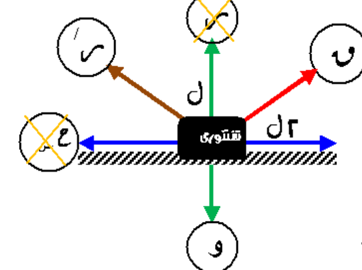
وضع جسم وزنه (و) ث كجم على مستوى أفقى خشن قياس زاوية الاحتكاك بين الجسم و المستوى (ل) ، شد الجسم بقوة تصنع مع الأفقى زاوية قياسها (٢ل) لأعلى جعلت الجسم على وشك الحركة أثبت أن مقدار هذه القوة يساوى و طا ل

الحل

∵ ر' هى محصلة القوتين ر ، ع س

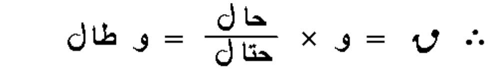
∴ الجسم متزن تحت تأثير القوى التى مقاديرها : و ، ر ، ر' و بتطبيق قاعدة لامى :

ق / حا (١٨٠° − ل) = و / حا [٩٠° − (٢ل − ل)]



أحمد الشتوى

∴ ق / حا(١٨٠° − ل) = و / حا(٩٠° − ل) ∴ ق / حال = و / حتال


∴ ق = و × حال / حتال = و طال

حل آخر

∵ الجسم على وشك الحركة

∴ ق حتا ٢ل = م_س ر

∴ ق حتا ٢ل = ر طال

∴ ق حتا ٢ل = ر × حال / حتال بالضرب × حتال ينتج :

ق حتا ٢ل حتال = ر حال (١)

، ر + ق حا ٢ل = و ∴ ر = و − ق حا ٢ل بالتعويض فى (١) ينتج :

ق حتا ٢ل حتال = (و − ق حا ٢ل) حال

∴ ق حتا ٢ل حتال = و حال − ق حا ٢ل حال

∴ ق حتا ٢ل حتال + ق حا ٢ل حال = و حال

∴ ق (حتا ٢ل حتال + حا ٢ل حال) = و حال

∴ ق [حتا (٢ل − ل)] = و حال

∴ ق حتا ل = و حال بالقسمة ÷ حتال ينتج : ق = و طال

حل تمارين (١ − ١) صفحة ١٣٥ بالكتاب المدرسى

أولاً : أكمل ما يلى :

(١) تسمى القوة التى تظهر عند انزلاق سطحين متلامسين خشنيين بقوة ....

(٢) تنعدم قوى الاحتكاك و يكون معامل الاحتكاك مساوياً للصفر فى السطوح ....

(٣) عندما تصل قوة الاحتكاك السكونى إلى قيمتها العظمى فإن الجسم يكون ....

(٤) قوة الاحتكاك الحركى تساوى حاصل ضرب معامل الاحتكاك الحركى فى قوة ....

(٥) محصلة قوة رد الفعل العمودى و قوة الاحتكاك السكونى تسمى ....

(٦) قوة الاحتكاك السكونى أقل من أو تساوى حاصل ضرب معامل الاحتكاك السكونى فى قوة ....

(٧) إذا كان معامل الاحتكاك السكونى بين كتلة مقدارها ٤٠ كجم و سطح الأرض يساوى ٠,٤٥ فإن مقدار القوة الأفقية التى تؤثر على الكتلة و تجعلها على وشك الحركة تساوى ....

(٨) إذا وضع جسم وزنه ٦ نيوتن على مستوى أفقى خشن و كان مقدار قوة الاحتكاك السكونى ٤ نيوتن فإن معامل الاحتكاك السكونى يساوى ....

الحل

(١) تسمى القوة التى تظهر عند انزلاق سطحين متلامسين خشنيين بقوة **الاحتكاك**

(٢) تنعدم قوى الاحتكاك و يكون معامل الاحتكاك مساوياً للصفر فى السطوح **الملساء**

(٣) عندما تصل قوة الاحتكاك السكونى إلى قيمتها العظمى فإن الجسم يكون **على وشك**

الحركة

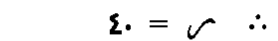
(٤) قوة الاحتكاك الحركى تساوى حاصل ضرب معامل الاحتكاك الحركى فى قوة رد الفعل العمودى

(٥) محصلة قوة رد الفعل العمودى و قوة الاحتكاك السكونى تسمى رد الفعل المحصل

(٦) قوة الاحتكاك السكونى أقل من أو تساوى حاصل ضرب معامل الاحتكاك السكونى فى قوة رد الفعل العمودى

(٧) ∵ الكتلة على وشك الحركة

∴ ر = ٤٠



، ق = م س ر = ٠,٤٥ × ٤٠

∴ ر = ١٨ ث كجم

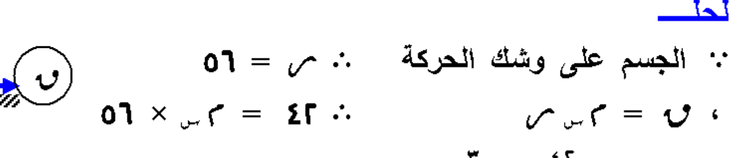
(٨) ∵ الجسم على وشك الحركة ∴ ر = ٦

، ∵ م س ر = ٤ ∴ ٦ ر = ٤ و منها : ر = $\frac{٤}{٦}$ = $\frac{٢}{٣}$

ثانياً : أجب عن الأسئلة الآتية :

(٩) يدفع فتى حجراً وزنه ٥٦ نيوتن بقوة أفقية مقدارها ٤٢ نيوتن على رصيف فكان الحجر على وشك الحركة أوجد معامل الاحتكاك بين الحجر و الرصيف

الحــل



∵ الجسم على وشك الحركة ∴ ر = ٥٦

، ق = م س ر ∴ ٤٢ = م س × ٥٦



∴ م س = $\frac{٤٢}{٥٦}$ = $\frac{٣}{٤}$

(١٠) جسم وزنه ٢٤٠ ث كجم وضع على مستوٍ أفقى خشن و يراد شده بحبل يميل على الأفقى بزاوية قياسها ٣٠° ، فإذا كان معامل الاحتكاك السكونى يساوى $\frac{\sqrt{٣}}{٣}$ فأوجد مقدار الشد الذى يلزم لجعل الجسم على وشك الحركة



الحــل

∵ الجسم على وشك الحركة

∴ ر + ش حا ٣٠° = ٢٤٠

∴ ر = ٢٤٠ − $\frac{١}{٢}$ ش

، ش حتا ٣٠° = م س ر

∴ ش × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ = $\frac{\sqrt{٣}}{٣}$ × (٢٤٠ − $\frac{١}{٢}$ ش) و منها ينتج :

∴ $\frac{١}{٢}$ ش = ٨٠ − $\frac{١}{٦}$ ش ∴ $\frac{٢}{٣}$ ش = ٨٠

و منها : ش = ١٢٠ ث كجم

(١١) وضع جسم وزنه ٣٩ ث جم على مستوى أفقى خشن ، أثرت عليه قوتان مقدارهما ٧ ، ٨ ث جم و تحصران بينهما زاوية قياسها ٦٠° فأصبح الجسم على وشك الحركة أوجد معامل الاحتكاك السكونى

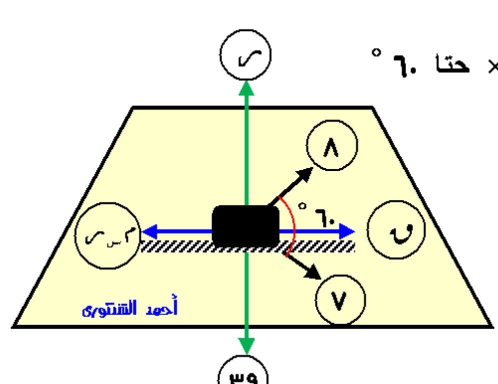
الحــل

القوى المستوية و المتزنة (ق ، ٧ ، ٨) ث جم

تكون : ق محصلة ٧ ، ٨ حيث :

ق² = ٤٩ + ٦٤ + ٢ × ٧ × ٨ × حتا ٦٠°

= ١٦٩ ∴ ق = ١٣ ث جم



، ∵ الجسم على وشك الحركة

∴ ر = ٣٩

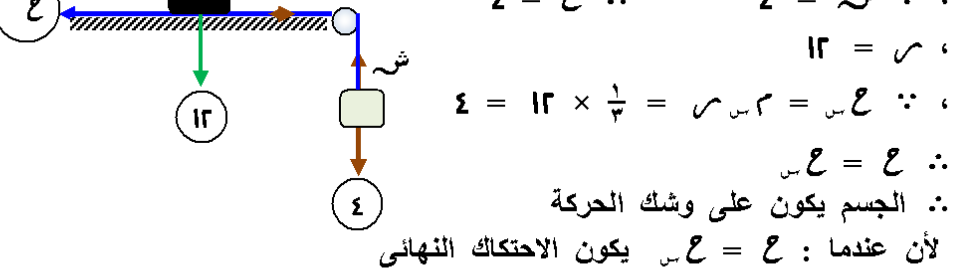
، ١٣ = م س ر

∴ ١٣ = م س × ٣٩

∴ م س = $\frac{١٣}{٣٩}$ = $\frac{١}{٣}$

(١٢) وضع جسم وزنه ١٢ نيوتن على نضد أفقى و ربط بخيط أفقى يمر على بكرة صغيرة ملساء مثبتة عند حافة النضد و يتدلى من طرفه ثقل مقداره ٤ نيوتن ، فإذا كان الجسم متزن على النضد فأوجد قوة الاحتكاك و إذا علم أن معامل الاحتكاك السكونى بين الجسم و النضد يساوى ١/٣ هل يكون الجسم على وشك الحركة ؟ فسر اجابتك

الحل



∵ المجموعة متزنة ∴ ح = ش

، ∵ ش = ٤ ∴ ح = ٤

، ر = ١٢

، ∵ ح س = م س ر = ١/٣ × ١٢ = ٤

∴ ح = ح س

∴ الجسم يكون على وشك الحركة

لأن عندما : ح = ح س يكون الاحتكاك النهائى

(١٣) شد صندوق وزنه (و) ث كجم موضوع على مستوى أفقى خشن حبلين الشد فيهما ٦ ، ٨ ث كجم و يحصران بينهما زاوية قياسها ٩٠° ، فإذا كان معامل الاحتكاك السكونى بين الصندوق و المستوى يساوى ١/٤ فأوجد وزن الصندوق (و) إذا كان الصندوق على وشك الحركة

الحل

القوى المستوية و المتزنة (ق ، ٦ ، ٨) ث جم

تكون : ق محصلة ٦ ، ٨ حيث :

ق² = ٣٦ + ٦٤ = ١٠٠

∴ ق = ١٠ ث جم

، ∵ الصندوق على وشك الحركة ∴ ر = و

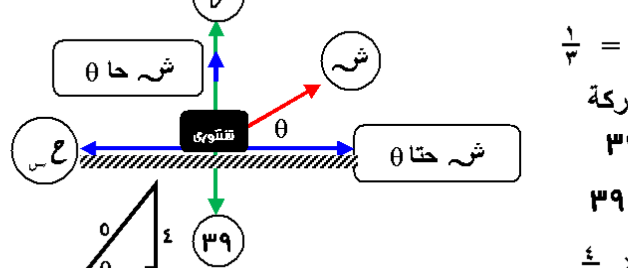
، ق = م س ر ∴ ١٠ = ١/٤ ر

∴ ر = ٤٠ ∴ و = ٤٠ ث كجم

(١٤) وضع جسم وزنه ٣٩ نيوتن على مستوٍ أفقى خشن و كان ظل زاوية الاحتكاك السكونى بين الجسم و المستوى ١/٣ ، شد الجسم بقوة تصنع مع الأفقى زاوية جيبها ٤/٥ جعلت الجسم على وشك الحركة أوجد :

أولاً : مقدار قوة الشد   ثانياً : مقدار الاحتكاك السكونى

الحل



∵ طا ل = ١/٣ ∴ م س = ١/٣

، ∵ الجسم على وشك الحركة

∴ ر + ش جا θ = ٣٩

∴ ر + ش × ٤/٥ = ٣٩

∴ ر = ٣٩ − ش × ٤/٥

، ح س = ش جتا θ = ش × ٣/٥

أولاً : ∵ ح س = م س ر = ١/٣ × (٣٩ − ش × ٤/٥)

∴ ش × ٣/٥ = ١/٣ × (٣٩ − ش × ٤/٥) بالضرب × ١٥ ينتج :

∴ ٩ ش = ١٩٥ − ٤ ش ∴ ١٣ ش = ١٩٥ ∴ ش = ١٥ نيوتن

ثانياً : ∵ ح س = ش × ٣/٥

∴ ح س = ١٥ × ٣/٥ = ٩ نيوتن

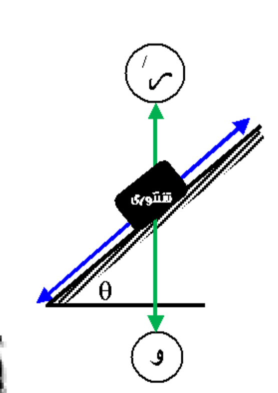
١ – ٢ اتزان جسم على مستوى مائل خشن

[١] إذا وضع جسم مقدار وزنه (و) على مستوٍ مائل خشن يميل على بزاوية قياسها θ و اتزن الجسم على المستوى فإنه يكون متزناً تحت تأثير قوتين هما :

١) قوة وزن الجسم $\overrightarrow{و}$ مقدارها (و) و تعمل رأسياً لأسفل

٢) قوة رد الفعل المحصل $\overrightarrow{ر'}$ مقدارها (ر') و تعمل رأسياً لأعلى

و من الشكل المقابل يكون : ر' = و



[٢] بتحليل القوة $\overrightarrow{ر'}$ إلى مركبتين فى اتجاهين متعامدين هما :

١) قوة الاحتكاك $\overrightarrow{ع}$ مقدارها (ع) و تعمل فى اتجاه موازى للمستوى لأعلى حيث : ع = ر' حا θ

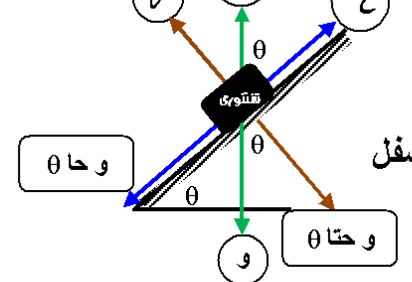
٢) قوة رد الفعل العمودى $\overrightarrow{ر}$ مقدارها (ر) و تعمل فى اتجاه عمودى على المستوى حيث : ر = ر' حتا θ

و بتحليل القوة $\overrightarrow{و}$ إلى مركبتين اتجاهين متعامدين هما :

١) و حتا θ فى اتجاه عمودى على المستوى لأسفل

٢) و حا θ فى اتجاه يوازى المستوى لأسفل

كما في الشكل المقابل :



فإن : معادلتى اتزان الجسم هما :

ر = و حتا θ ، ع = و حا θ

العلاقة بين قياس زاوية الاحتكاك السكونى و قياس زاوية ميل المستوى على الأفقى :

إذا وضع جسم على مستوٍ مائل خشن و كان الجسم على وشك الحركة فإن قياس زاوية الاحتكاك السكونى يساوى قياس زاوية ميل المستوى على الأفقى

البرهان :

∵ الجسم على وشك الانزلاق أى على وشك الحركة لأسفل المستوى بتأثير وزنه فقط

∴ الاحتكاك يكون نهائياً ، و مقداره : ع = $م_{س}$ ر

و تصبح معادلتا الاتزان هما : ر = و حتا θ (١)

، $م_{س}$ ر = و حا θ (٢)

و بقسمة (٢) ÷ (١) ينتج : $م_{س} = \frac{حا\ θ}{حتا\ θ}$ = طا θ

، قوة رد الفعل المحصل تصنع مع العمودى على المستوى زاوية قياسها = قياس زاوية الاحتكاك السكونى و ليكن قياسها (ل)

، ∵ $م_{س}$ = طا ل ∴ طا ل = طا θ ∴ ل = θ

كما يمكن استنتاج أن : ل = θ من الشكل

أى أن : قياس زاوية الاحتكاك السكونى = قياس زاوية ميل المستوى على الأفقى

كما يمكن صياغة هذه المتساوية بدلالة معامل الاحتكاك السكونى كما يلى : طا ل = $م_{س}$ أو طا θ = $م_{س}$

ملاحظات :

(١) ∵ ع = و حا θ ، ر = و حتا θ

∴ م~س~ ر = طا ل × و حتا θ = و حتا θ طا ل

، و بالمقارنة بين : و حا θ ، م~س~ ر أو المقارنة بين : θ ، ل تحدث للجسم إحدى الحالات التالية :

١) يسكن (أى يكون متزناً) و ليس على وشك الحركة و يكون الاحتكاك غير نهائى إذا كان :

و حا θ < م~س~ ر أو θ < ل و العكس صحيح

٢) يسكن و لكنه يكون على وشك الحركة و يكون الاحتكاك نهائياً

إذا كان : و حا θ = م~س~ ر أو θ = ل و العكس صحيح

٣) ينزلق على المستوى إذا كان :

و حا θ > م~س~ ر أو θ > ل و العكس صحيح

(٢) إذا كان (ق) مقدار قوة تجعل الجسم على وشك لأعلى أو تمنع الجسم من الانزلاق فإن : اتجاه م~س~ ر يكون لأعلى المستوى

(٣) إذا كان (ق) مقدار قوة تجعل الجسم على وشك لأسفل فإن : اتجاه م~س~ ر يكون لأسفل المستوى

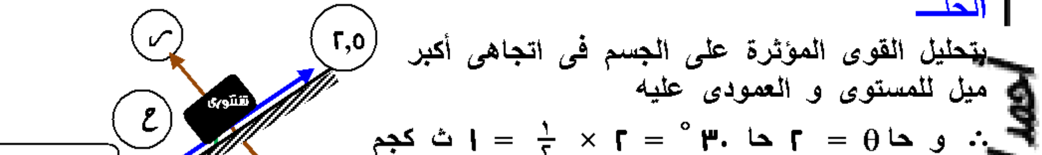
(٤) أقل قوة تؤثر على الجسم و يبقى متزناً هى التى تمنعه من الانزلاق و يكون : اتجاه م~س~ ر لأعلى المستوى

(٥) أكبر قوة تؤثر على الجسم و يبقى متزناً هى التى تجعله على وشك لأعلى المستوى و يكون : اتجاه م~س~ ر لأسفل المستوى

إجابة حاول أن تحل (١) صفحة ١٥

وضع جسم وزنه ٢ ث كجم على مستوى يميل على الأفقى بزاوية قياسها ٣٠° و معامل الاحتكاك السكونى بينه و بين الجسم يساوى $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ، أثرت على الجسم قوة تعمل فى اتجاه خط أكبر ميل للمستوى و لأعلى مقدارها ٢,٥ ث كجم فإذا كان الجسم متزناً عين قوة الاحتكاك عندئذ و بين ما إذا كان الجسم على وشك الحركة أم لا ؟

الحل



بتحليل القوى المؤثرة على الجسم فى اتجاهى أكبر ميل للمستوى و العمودى عليه

∴ و حا θ = ٢ حا ٣٠° = ٢ × $\frac{1}{2}$ = ١ ث كجم

∵ ق = ٢,٥ ث كجم ∴ ق > و حا θ

، قوة الاحتكاك تعمل فى اتجاه خط أكبر ميل لأسفل ، ∵ الجسم متزن

∴ ق = و حا θ + ع ∴ ٢,٥ = ١ + ع و منها : ع = ١,٥ ث كجم

، ر = ٢ حتا ٣٠° = ٢ × $\frac{\sqrt{3}}{2}$ = $\sqrt{3}$

∵ م~س~ ر = $\frac{\sqrt{3}}{2}$ × $\sqrt{3}$ = ١,٥ ∴ م~س~ ر = ع

∴ الاحتكاك يكون نهائياً ∴ الجسم يكون على وشك الحركة

إجابة تفكير ناقد صفحة ١٥

إذا وضع جسم على مستوى مائل يميل على الأفقى بزاوية قياسها (هـ) و كان قياس زاوية الاحتكاك السكونى و المستوى (ل) ماذا تتوقع أن يحدث للجسم إذا كان :

(أ) هـ < ل (ب) هـ > ل

الحل

(أ) ∵ هـ < ل ∴ الجسم يكون ساكناً (متزناً) و ليس على وشك الحركة

لأن الاحتكاك غير نهائى

(ب) ∵ هـ < ل ∴ الجسم يكون متحركاً (ينزلق) لأسفل المستوى

إجابة حاول أن تحل (٢) صفحة ١٦

وضع جسم مقدار وزنه ٣٠ نيوتن على مائل خشن لوحظ أن الجسم يكون على وشك الانزلاق إذا كان المستوى يميل على الأفقى بزاوية قياسها ٣٠° ، فإذا أريد زيادة ميل المستوى إلى ٦٠° فأوجد مقدار :

(أ) أقل قوة تؤثر فى الجسم موازية لخط أكبر ميل فى المستوى و تمنعه من الانزلاق

(ب) القوة التى تؤثر فى الجسم موازية لخط أكبر ميل فى المستوى و تجعله على وشك الحركة إلى أعلى المستوى

الحل

∵ الجسم على وشك الانزلاق تحت تأثير وزنه فقط عندما يميل المستوى على الأفقى بزاوية قياسها ٣٠° ∴ م س = طا ٣٠° = $\frac{1}{\sqrt{3}}$

(أ) ∵ الجسم على وشك الانزلاق لأسفل

∴ ر = ٣٠ حتا ٦٠° = ٣٠ × $\frac{1}{2}$

= ١٥ نيوتن

، م س ر + ق١ = ٣٠ حا ٦٠°

∴ $\frac{1}{\sqrt{3}}$ × ١٥ + ق١ = ٣٠ × $\frac{\sqrt{3}}{2}$

∴ $5\sqrt{3}$ + ق١ = $15\sqrt{3}$

∴ ق١ = $15\sqrt{3} - 5\sqrt{3}$

و منها : ق١ = $10\sqrt{3}$ نيوتن

(ب) ∵ الجسم على وشك الحركة لأعلى

∴ ر = ٣٠ حتا ٦٠° = ٣٠ × $\frac{1}{2}$

= ١٥ نيوتن

، ق٢ = م س ر + ٣٠ حا ٦٠°

∴ ق٢ = $\frac{1}{\sqrt{3}}$ × ١٥ + ٣٠ × $\frac{\sqrt{3}}{2}$

ق٢ = $15\sqrt{3} + 5\sqrt{3}$

و منها : ق٢ = $20\sqrt{3}$ نيوتن

إجابة حاول أن تحل (٣) صفحة ١٧

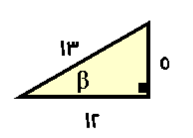
جسم وزنه ٣٠ نيوتن موضوع على مستوى مائل خشن لوحظ أن الجسم يكون على وشك الانزلاق إذا كان جيب زاوية ميل المستوى على الأفقى = $\frac{5}{13}$ فإذا زيد ميل المستوى بحيث يكون جيب زاوية ميل المستوى على الأفقى $\frac{3}{5}$:

(أ) أوجد مقدار أقل قوة تؤثر فى الجسم موازية لخط أكبر ميل للمستوى تمنعه من الانزلاق

(ب) القوة التى تجعله على وشك الحركة لأعلى المستوى و موازية لخط أكبر ميل

الحل

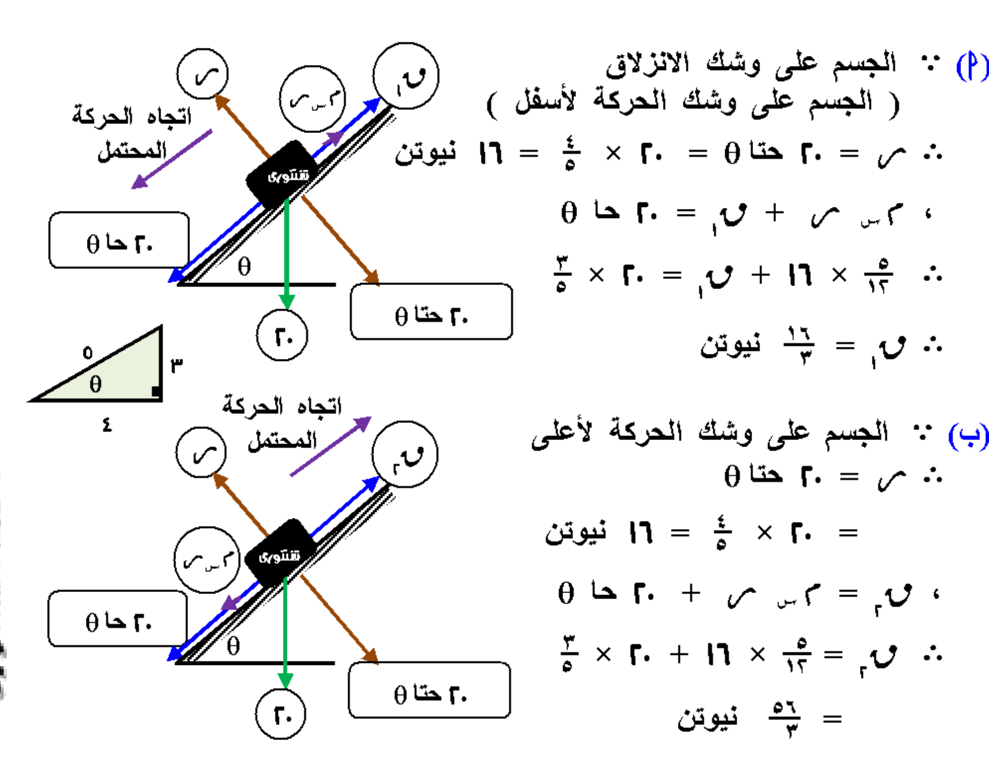
∵ الجسم على وشك الانزلاق تحت تأثير وزنه فقط عندما يميل المستوى على الأفقى بزاوية جيبها = $\frac{5}{13}$





∴ م س = طا β = $\frac{5}{12}$

و عندما يصبح جيب زاوية ميل المستوى على الأفقى = $\frac{3}{5}$



(أ) ∵ الجسم على وشك الانزلاق (الجسم على وشك الحركة لأسفل)

∴ $ر = ٢٠ \text{ حتا } \theta = ٢٠ \times \frac{٤}{٥} = ١٦$ نيوتن

، $م_س \, ر + ق_١ = ٢٠ \text{ حا } \theta$

∴ $\frac{٥}{١٢} \times ١٦ + ق_١ = ٢٠ \times \frac{٣}{٥}$

∴ $ق_١ = \frac{١٦}{٣}$ نيوتن

(ب) ∵ الجسم على وشك الحركة لأعلى

∴ $ر = ٢٠ \text{ حتا } \theta$

$= ٢٠ \times \frac{٤}{٥} = ١٦$ نيوتن

، $ق_٢ = م_س \, ر + ٢٠ \text{ حا } \theta$

∴ $ق_٢ = \frac{٥}{١٢} \times ١٦ + ٢٠ \times \frac{٣}{٥}$

$= \frac{٥٦}{٣}$ نيوتن

حل تمارين (١ – ٢) صفحة ١٧ بالكتاب المدرسى

أولاً : ضع علامة (✓) أو علامة (×)

(١) يتوقف معامل الاحتكاك بين جسمين على شكليهما و كتلتيهما

(٢) تسمى النسبة بين مقدارى قوة الاحتكاك السكونى و رد الفعل العمودى بمعامل الاحتكاك

(٣) ظل زاوية الاحتكاك السكونى يساوى النسبة بين قوة الاحتكاك النهائى و رد الفعل العمودى

(٤) إذا وضع جسم على مستوى مائل خشن و كان على وشك الانزلاق فإن معامل الاحتكاك السكونى يساوى قياس زاوية ميل المستوى على الأفقى

(٥) إذا وضع جسم على مستوى مائل خشن و كان على وشك الانزلاق فإن قياس زاوية الاحتكاك يساوى قياس زاوية ميل المستوى على الأفقى

(٦) زاوية الاحتكاك هى الزاوية المحصورة بين قوة الاحتكاك النهائى و قوة رد الفعل المحصل

الحل

(١) × " يتوقف معامل الاحتكاك بين جسمين على طبيعة الجسمين المتلامسين "

(٢) ✓ (٣) ✓

(٤) × " إذا وضع جسم على مستوى مائل خشن و كان على وشك الانزلاق فإن قياس زاوية الاحتكاك السكونى يساوى قياس زاوية ميل المستوى على الأفقى "

(٥) ✓

(٦) × " هى الزاوية المحصورة بين قوة رد الفعل المحصل و قوة رد الفعل عندما يصل مقدار قوة الاحتكاك إلى قيمته العظمى "

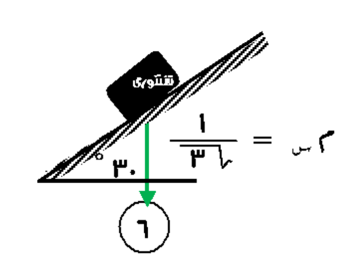
ثانياً : اختر الاجابة الصحيحة من بين الاجابات المعطاة

(٧) فى الشكل المقابل :

إذا كان الجسم على وشك الانزلاق لأسفل فإن قوة الاحتكاك النهائى تساوى ....

(أ) ٣ (ب) $٢\sqrt{٣}$

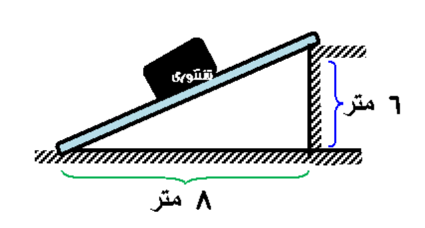
(حـ) $٣\sqrt{٢}$ (ء) ٩



(٨) فى الشكل المقابل :

الجسم على وشك الانزلاق إلى أسفل المستوى فيكون :

قياس زاوية الاحتكاك السكونى يساوى ....



(أ) $36,87^\circ$ (ب) $41,41^\circ$ (جـ) $48,59^\circ$ (ء) $53,13^\circ$

(٩) فى الشكل المقابل :
الجسم على وشك الانزلاق إلى أسفل المستوى فيكون :
ق (∠ هـ) = ...

م س = ٠,٢٥

(أ) $36,87^\circ$ (ب) $41,41^\circ$ (جـ) $48,59^\circ$ (ء) $53,13^\circ$

الحـــل

(٧) ∵ الجسم على وشك الانزلاق لأسفل تحت تأثير وزنه فقط

∴ ح س = ٦ حا ٣٠° = ٦ × $\frac{1}{2}$ = ٣

حل آخر

ر = ٦ حتا ٣٠° = ٦ × $\frac{\sqrt{3}}{2}$

∴ ح س = م س ر = ٦ × $\frac{\sqrt{3}}{2}$ × $\frac{1}{\sqrt{3}}$ = ٣

(٨) ∵ الجسم على وشك الانزلاق لأسفل تحت تأثير وزنه فقط

∴ قياس زاوية الاحتكاك السكونى يساوى قياس زاوية ميل المستوى على الأفقى

∴ ظل زاوية الاحتكاك السكونى = $\frac{6}{8}$

∴ قياس زاوية الاحتكاك السكونى = $36,87^\circ$

(٩) ∵ الجسم على وشك الانزلاق لأسفل تحت تأثير وزنه فقط

∴ قياس زاوية الاحتكاك السكونى يساوى قياس زاوية ميل المستوى على الأفقى

∴ ظل زاوية ميل المستوى على الأفقى = ٠,٢٥

∴ قياس زاوية ميل المستوى على الأفقى = $14,04^\circ$

(١٠) جسم وزنه ٣٨ ث كجم يكون على وشك الحركة تحت تأثير وزنه إذا وضع على مستوى خشن يميل على الأفقى بزاوية ظلها $\frac{1}{4}$ ، فإذا وضع هذا الجسم على مستوى أفقى فى نفس خشونة المستوى المائل و أثرت عليه قوة شد إلى أعلى تصنع مع الأفقى زاوية ظلها $\frac{3}{4}$ و تقع فى مستوى رأسى فجعلته على وشك الحركة

أوجد مقدار هذه القوة و مقدار رد الفعل

الحـــل

∵ الجسم على وشك الحركة لأسفل تحت تأثير وزنه فقط إذا وضع على مستوى خشن يميل على الأفقى بزاوية ظلها $\frac{1}{4}$ ∴ م س = $\frac{1}{4}$

على المستوى الأفقى :

∵ الجسم على وشك الحركة

∴ ر + ش حا θ = ٣٨

∴ ر = ٣٨ − ش × $\frac{3}{5}$ (١)

، م س ر = ش حتا θ = ش × $\frac{4}{5}$

∴ $\frac{1}{4}$ × (٣٨ − ش × $\frac{3}{5}$) = ش × $\frac{4}{5}$

∴ ($\frac{4}{5}$ + $\frac{3}{20}$) ش = $\frac{1}{4}$ × ٣٨ و منها : ش = ١٠ ث كجم

بالتعويض فى (١) ينتج : ر = ٣٨ − ١٠ × $\frac{3}{5}$ = ٣٢ ث كجم

(١١) وضع جسم وزنه ٤٠٠ ث جم على مستوى يميل على الأفقى بزاوية قياسها ٣٠° و معامل الاحتكاك بينه و بين الجسم يساوى $\frac{\sqrt{3}}{4}$ أثرت على الجسم قوة مقدارها ٥٠ ث جم فى خط أكبر ميل للمستوى و لأعلى ، إذا كان الجسم متزناً فعين قوة الاحتكاك و بين ما إذا كان

الجسم على وشك الحركة أم لا

الحل

بتحليل القوى المؤثرة على الجسم فى اتجاهى أكبر ميل للمستوى و العمودى عليه

∴ و حا θ = ٤٠٠ حا ٣٠° = ٤٠٠ × ١/٢ = ٢٠٠

∵ ق = ٥٠ ث كجم ،

∴ ق < و حا θ

، قوة الاحتكاك تعمل فى اتجاه خط أكبر ميل لأعلى ، ∵ الجسم متزن

∴ ح + ق = و حا θ ∴ ح + ٥٠ = ٢٠٠ و منها : ح = ١٥٠ ث جم

، ر = ٤٠٠ حتا ٣٠° = ٤٠٠ × √٣/٢ = ٢٠٠√٣

∵ م_س ر = √٣/٤ × ٢٠٠√٣ = ١٥٠ ∴ م_س ر = ح

∴ الاحتكاك يكون نهائياً ∴ الجسم يكون على وشك الحركة

(١٢) وضع جسم كتلته ٤ كجم على مستوى مائل خشن يميل على الأفقى بزاوية قياسها ٣٠° و معامل الاحتكاك بينه و بين المستوى √٣/٢

بين ما إذا كان الجسم ينزلق على المستوى أو يكون على وشك الانزلاق أو أن الاحتكاك غير نهائى ، و أوجد مقدار و اتجاه قوة الاحتكاك عندئذ ، ثم أوجد مقدار القوة التى تؤثر على هذا الجسم فى اتجاه خط أكبر ميل بحيث يكون الجسم على وشك الحركة إلى أعلى المستوى

الحل

بتحليل القوى المؤثرة على الجسم فى اتجاهى أكبر ميل للمستوى و العمودى عليه

∵ ح = (و حا هـ) = ٤ حا ٣٠° = ٤ × ١/٢ = ٢

، ر = ٤ حتا ٣٠° = ٤ × √٣/٢ = ٢√٣

∵ م_س ر = √٣/٢ × ٢√٣ = ٣ ،

∴ ح < م_س ر ∴ الاحتكاك غير نهائى

، اتجاه قوة الاحتكاك يكون لأعلى ، ح = ٢ ث كجم

عندما تؤثر على الجسم قوة و يكون على وشك الحركة لأعلى

∴ ر = ٤ حا ٣٠° = ٤ × √٣/٢ = ٢√٣

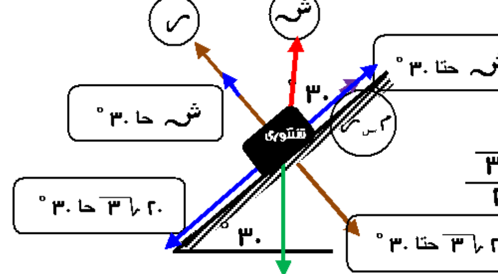
، ق = م_س ر + ٤ حا ٣٠°

= √٣/٢ × ٢√٣ + ٤ × ١/٢

= ٣ + ٢ = ٥ × ث كجم

(١٣) وضع جسم وزنه ٢٠√٣ نيوتن على مستوى مائل يميل على الأفقى بزاوية قياسها ٣٠° ثم شد إلى أعلى بواسطة خيط واقع فى المستوى الرأسى المار بخط أكبر ميل و فى اتجاه يصنع زاوية قياسها ٣٠° مع المستوى ، فإذا كان معامل الاحتكاك يساوى ٠,٢٥ فأوجد أقل قيمة للشد فى الخيط تمنع الجسم من الحركة إلى أسف المستوى

الحل



∵ الجسم على وشك الأنزلاق

∴ ر + ش حا ٣٠° = ٢٠√٣ حتا ٣٠°

∴ ر + ش × ١/٢ = ٢٠√٣ × √٣/٢

∴ ر = ٣٠ − ١/٢ ش

، ش حتا ٣٠° + م_س ر = ٢٠√٣ حا ٣٠°

∴ √٣/٢ ش + ٠,٢٥ + (٣٠ − ½ ش) = ٢٠ √٣ × ½

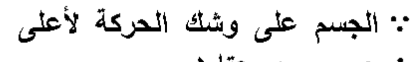
بالضرب × ٢ ينتج : (√٣ − ٠,٢٥) ش = ٢٠ √٣ − ١٥

∴ ش = (٢٠ √٣ − ١٥) / (√٣ − ٠,٢٥) = ١٣,٢٥ نيوتن

(١٤) وضع جسم وزنه (و) على مستوى خشن يميل على الأفقى بزاوية قياسها (هـ) فوجد أن أقل قوة توازى خط أكبر ميل للمستوى و تجعل الجسم على وشك الحركة إلى أعلى المستوى تساوى : ٢ و حا هـ أثبت أن :

(أ) قياس زاوية الاحتكاك = هـ (ب) مقدار رد الفعل المحصل = و

الحل



∵ الجسم على وشك الحركة لأعلى

∴ ر = و حتا هـ

، ق = مس ر + و حا هـ

، ∵ ق = ٢ و حا هـ

∴ ٢ و حا هـ = مس × و حتا هـ + و حا هـ

∴ و حا هـ = مس و حتا هـ

بالقسمة ÷ و حتا هـ ينتج : مس = طا هـ

(أ) ∵ مس = ظل زاوية الاحتكاك ∴ ظل زاوية الاحتكاك = طا هـ

∴ قياس زاوية الاحتكاك = هـ

(ب) ر' = ر √(١ + مس²) = و حتا هـ √(١ + طا² هـ) = و حتا هـ √(قا² هـ)

= و حتا هـ قتا هـ = و

(١٥) وضع جسم وزنه ٢٥ ث كجم على مستوى خشن تؤثر عليه قوة ق فى اتجاه خط أكبر ميل لأعلى المستوى ، فإذا علم أن الجسم يكون على وشك الحركة إلى أعلى المستوى عندما ق = ١٥ ث كجم و يكون على وشك الحركة إلى أسفل المستوى عندما ق = ١٠ ث كجم

فأوجد : (أ) قياس زاوية ميل المستوى على الأفقى

(ب) معامل الاحتكاك السكونى

الحل

فى الحالة الأولى :

∵ القضيب يكون على وشك الحركة لأعلى

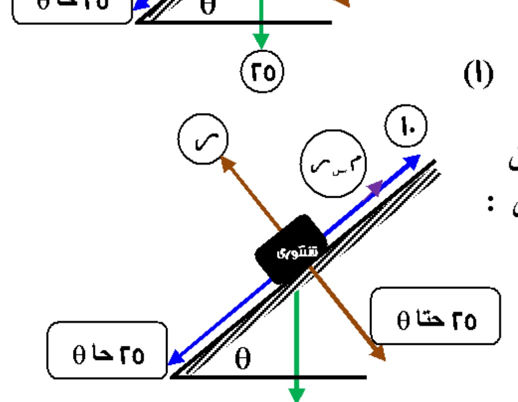
∴ من الشكل المقابل معادلات الاتزان هى :

١٥ = مس ر + ٢٥ حا θ

، ر = ٢٥ حتا θ

∴ ١٥ = ٢٥ ر حتا θ + ٢٥ حا θ

∴ ٢٥ ر حتا θ = ١٥ − ٢٥ حا θ (١)



فى الحالة الثانية :

∵ القضيب يكون على وشك الحركة لأسفل

∴ من الشكل المقابل معادلات الاتزان هى :

١٠ + مس ر = ٢٥ حا θ (٢)

، ر = ٢٥ حتا θ

∴ ١٠ + ٢٥ ر حتا θ = ٢٥ حا θ

بالتعويض من (١) ينتج :

١٠ + ٢٥ حا θ = ١٥ − ٢٥ حا θ

∴ ٥٠ حا θ = ٢٥ ∴ حا θ = ½ ∴ θ = ٣٠°

∴ ر = ٢٥ حتا ٣٠° = ٢٥ × √٣/٢ = ٢٥/٢ √٣ نيوتن ،

بالتعويض من (١) ينتج : ١٠ + مس × ٢٥/٢ √٣ = ٢٥ × ½

∴ مس × ٢٥/٢ √٣ = ٢٥/٢ − ١٠ و منها : مس = ١/١٥ √٣

(١٦) وضع جسم وزنه (و) على مستوى خشن يميل على الأفقى بزاوية جيبها $\frac{٥}{١٣}$ شد الجسم بقوة أفقية مقدارها ٢٢ نيوتن واقعة فى المستوى الرأسى المار بخط أكبر ميل للمستوى جعلت الجسم على وشك الحركة لأعلى المستوى ، فإذا كان معامل الاحتكاك السكونى هو $\frac{١}{٢}$ ، فأوجد مقدار وزن الجسم (و)

٢٢ حتا θ
ر
م س ر
٢٢
θ
٢٢ حا θ
و حا θ
و حتا θ
و
١٣ ، ٥ ، ١٢

الحل

∵ الجسم على وشك الحركة لأعلى

∴ ر = و حتا θ + ٢٢ حا θ

= $\frac{١٢}{١٣}$ و + ٢٢ × $\frac{٥}{١٣}$

، ٢٢ حتا θ = م س ر + و حا θ

∴ ٢٢ × $\frac{١٢}{١٣}$ = $\frac{١}{٢}$ × ($\frac{١٢}{١٣}$ و + ٢٢ × $\frac{٥}{١٣}$) + $\frac{٥}{١٣}$ و

∴ ٢٢ × $\frac{١٢}{١٣}$ = $\frac{٦}{١٣}$ و + $\frac{٥٥}{١٣}$ + $\frac{٥}{١٣}$ و بالضرب × ١٣ ينتج :

٢٦٤ = ٦ و + ٥٥ + ٥ و ∴ ١١ و = ٢٠٩ ∴ و = ١٩ نيوتن

(١٧) وضع جسم وزنه ٨ ث كجم على مستوى خشن ثم اميل المستوى تدريجياً حتى أصبح الجسم على وشك الانزلاق لأسفل المستوى عندما كان قياس زاوية ميل المستوى ٣٠° ، أوجد معامل الاحتكاك السكونى بين الجسم و المستوى ، و إذا ربط الجسم عندئذ بخيط ثم شد فى اتجاه يميل بزوية ٣٠° على المستوى حتى أصبح على وشك الحركة إلى أعلى المستوى فأوجد :

(أ) مقدار قوة الشد (ب) مقدار رد الفعل العمودى

الحل

∵ الجسم على وشك الأنزلاق لأسفل المستوى تحت وزنه فقط

∴ م س = طا ٣٠° = $\frac{١}{\sqrt{٣}}$

ر
ش
ش حتا ٣٠°
ش حا ٣٠°
٣٠
م س ر
٨ حا ٣٠°
٣٠
٨ حتا ٣٠°
٨

، ∵ الجسم على وشك الحركة لأعلى

∴ ر + ش حا ٣٠° = ٨ حتا ٣٠°

∴ ر + ش × $\frac{١}{٢}$ = ٨ × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

∴ ر = ٤ $\sqrt{٣}$ − $\frac{١}{٢}$ ش ،

ش حتا ٣٠° = م س ر + ٨ حا ٣٠°

∴ $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ش = $\frac{١}{\sqrt{٣}}$ × (٤ $\sqrt{٣}$ − $\frac{١}{٢}$ ش) + ٨ × $\frac{١}{٢}$

بالضرب × ٢ $\sqrt{٣}$ ينتج : ٣ ش = ٨ $\sqrt{٣}$ − ش + ٨ $\sqrt{٣}$

∴ ٤ ش = ١٦ $\sqrt{٣}$ ∴ ش = ٤ $\sqrt{٣}$ ث كجم

∴ ر = ٤ $\sqrt{٣}$ − $\frac{١}{٢}$ × ٤ $\sqrt{٣}$ = ٢ $\sqrt{٣}$ ث كجم

(١٨) وضع جسم وزنه ٣ ث كجم على مستوى خشن يميل على الأفقى بزاوية قياسها ٦٠° و كان معامل الاحتكاك السكونى بين الجسم و المستوى $\frac{\sqrt{٣}}{٩}$ بين مع ذكر السبب أن هذا الجسم لا يمكن أن يبقى ساكناً ثم أوجد قيمة أكبر و أصغر قوة أفقية (واقعة فى المستوى الرأسى المار بخط أكبر ميل) تؤثر فى الجسم و يبقى متزناً

الحل

ر
ع
٣ حا ٦٠°
٦٠°
٣
٣ حتا ٦٠°

بتحليل القوى المؤثرة على الجسم فى اتجاهى أكبر ميل للمستوى و العمودى عليه

∵ ع (و حا هـ) = ٣ حا ٦٠°

= ٣ × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ = $\frac{٣\sqrt{٣}}{٢}$

، ر = ٣ حتا ٦٠° = ٣ × $\frac{١}{٢}$ = $\frac{٣}{٢}$

، ∵ م س ر = $\frac{\sqrt{٣}}{٩}$ × $\frac{٣}{٢}$ = $\frac{٣\sqrt{٣}}{١٨}$

∵ ع > مس ر

∴ الجسم لا يمكن أن يبقى ساكناً

أكبر قيمة للقوة الأفقية هى التى تجعل الجسم على وشك الحركة لأعلى

بتحليل القوى المؤثرة على الجسم فى اتجاهى أكبر ميل للمستوى و العمودى عليه

∴ ر = ق حا ٦٠° + ٣ حتا ٦٠°

= $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ق + ٣ × $\frac{١}{٢}$

، ق حتا ٦٠° = مس ر + ٣ حا ٦٠°

∴ ق × $\frac{١}{٢}$ = $\frac{\sqrt{٣}}{٩}$ × ($\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ق + ٣ × $\frac{١}{٢}$) + ٣ × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

∴ ($\frac{١}{٢}$ − $\frac{١}{٦}$) ق = ($\frac{١}{٦}$ + $\frac{٣}{٢}$) $\sqrt{٣}$

∴ $\frac{١}{٣}$ ق = $\frac{٥}{٣}$ $\sqrt{٣}$ ∴ ق = ٥ $\sqrt{٣}$ ث كجم

أصغر قيمة للقوة الأفقية هى التى تجعل الجسم على وشك الحركة لأسفل

بتحليل القوى المؤثرة على الجسم فى اتجاهى أكبر ميل للمستوى و العمودى عليه

∴ ر = ق حا ٦٠° + ٣ حتا ٦٠°

= $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ق + ٣ × $\frac{١}{٢}$

، ق حتا ٦٠° + مس ر = ٣ حا ٦٠°

∴ ق × $\frac{١}{٢}$ + $\frac{\sqrt{٣}}{٩}$ × ($\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ق + ٣ × $\frac{١}{٢}$) = ٣ × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

∴ ($\frac{١}{٢}$ + $\frac{١}{٦}$) ق = ($\frac{٣}{٢}$ − $\frac{١}{٦}$) $\sqrt{٣}$

∴ $\frac{٢}{٣}$ ق = $\frac{٤}{٣}$ $\sqrt{٣}$ ∴ ق = ٢ $\sqrt{٣}$ ث كجم

(١٩) كتلتان ٣ ، ٥ كجم متصلان بخيط خفيف و موضوعتان على مستوى مائل خشن و كان معامل الاحتكاك السكونى بين المستوى و الجسمين $\frac{٢}{٣}$ ، $\frac{٤}{٥}$ على الترتيب ، بين أى الجسمين يوضع أسفل الجسم الآخر حتى يتحرك الجسمان معاً ، ثم أثبت أن ظل زاوية ميل المستوى على الأفقى عندما يكون الجسمان على وشك الحركة = $\frac{٣}{٤}$

الحل

∵ $\frac{٤}{٥}$ > $\frac{٢}{٣}$ أى أن : معامل الاحتكاك السكونى للجسم الذى كتلته ٥ كجم > معامل الاحتكاك السكونى للجسم الذى كتلته ٣ كجم

∴ الجسم الذى كتلته ٥ كجم يوضع أسفل الجسم الذى كتلته ٣ كجم حتى يتحرك الجسمان معاً و الخيط مشدود بينهما أى الجسمان يكونان على وشك الحركة لأسفل

بالنسبة للجسم كتلته ٥ كجم : $ر_١$ = ٥ حتا θ ،

٥ حا θ = $م_{س١}$ $ر_١$ + ش ∴ ٥ حا θ = $\frac{٤}{٥}$ × ٥ حتا θ + ش

و منها : ش = ٥ حا θ − ٤ حتا θ (١)

بالنسبة للجسم كتلته ٣ كجم : $ر_٢$ = ٣ حتا θ ،

٣ حا θ + ش = $م_{س٢}$ $ر_٢$ ∴ ٣ حا θ + ش = $\frac{٢}{٣}$ × ٣ حتا θ

و منها : ش = ٢ حتا θ − ٣ حا θ

بالتعويض من (١) ينتج : ٥ حا θ − ٤ حتا θ = ٢ حتا θ − ٣ حا θ

∴ ٨ حا θ = ٦ حتا θ بالقسمة ÷ ٨ حتا θ ينتج : ظا θ = $\frac{٦}{٨}$ = $\frac{٣}{٤}$

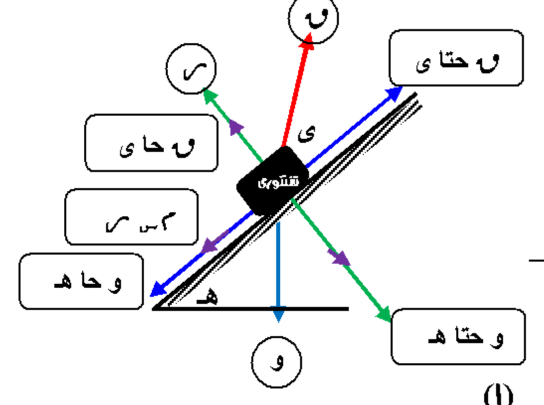
(٢٠) جسم وزنه (و) موضوع على مستوٍ مائل خشن يميل على الأفقى بزاوية قياسها (هـ) و زاوية الاحتكاك بينه و بين الجسم قياسها (ل) ، أثرت قوة مقدارها (ق) و تميل على المستوى لأعلى بزاوية قياسها (ى) أوجد أصغر مقدار للقوة (ق) بحيث تجعل الجسم على وشك الحركة لأعلى

الحل

∵ قياس زاوية الاحتكاك = ل

∴ م س = ط ل = $\frac{\text{حا ل}}{\text{حتا ل}}$

، ح س = م س ر = $\frac{\text{ر حا ل}}{\text{حتا ل}}$



، ∵ الجسم على وشك الحركة

∴ معادلتا الاتزان هما :

ق حتا ى = و حا هـ + م س ر

= و حا هـ + $\frac{\text{ر حا ل}}{\text{حتا ل}}$

بالضرب × حتا ل ينتج :

ق حتا ى حتا ل =

و حا هـ حتا ل + ر حا ل   (١)

، ر + ق حا ى = و حتاهـ

∴ ر = و حتاهـ − ق حا ى   بالتعويض من (١) ينتج :

ق حتا ى حتا ل = و حا هـ حتا ل + (و حتاهـ − ق حا ى) × حا ل

∴ ق حتا ى حتا ل = و حا هـ حتا ل + و حتاهـ حا ل − ق حا ى حا ل

∴ ق حتا ى حتا ل + ق حا ى حا ل = و حا هـ حتا ل + و حتاهـ حا ل

∴ ق حتا (ى − ل) = و حا (هـ + ل)   ∴ ق = $\frac{\text{و حا (هـ + ل)}}{\text{حتا (ى − ل)}}$

و يكون مقدار ق أقل ما يمكن عندما يكون و حتا (ى − ل) أكبر ما يمكن

أى عندما : حتا (ى − ل) = ١   ∴ ى − ل = ٠   أى : ى = ل

∴ أصغر مقدار للقوة = و حا (هـ + ل) و خط عملها يصنع مع المستوى زاوية قياسها = قياس زاوية الاحتكاك

حل آخر

∵ الجسم متزن تحت ثلاث قوى هى :

ق ، و ، ر′ حيث : ر′ محصلة ر ، م س ر

من الشكل المقابل باستخدام قاعدة لامى ينتج :

$\frac{\text{ق}}{\text{حا [١٨٠° − (هـ + ل)]}}$ = $\frac{\text{و}}{\text{حا [٩٠° − (ى − ل)]}}$

= $\frac{\text{ر′}}{\text{حا [٩٠° + (ى + هـ)]}}$

∴ $\frac{\text{ق}}{\text{حا (هـ + ل)}}$ = $\frac{\text{و}}{\text{حتا (ى − ل)}}$ ∴ ق = $\frac{\text{و حا (هـ + ل)}}{\text{حتا (ى − ل)}}$

و يكون مقدار ق أقل ما يمكن عندما يكون و حا (ى − ل) أكبر ما يمكن

أى عندما : حتا (ى − ل) = ١   ∴ ى − ل = ٠   أى : ى = ل

∴ أصغر مقدار للقوة = و حا (هـ + ل) و خط عملها يصنع مع المستوى زاوية قياسها = قياس زاوية الاحتكاك

حل تمارين عامة صفحة ٢١ بالكتاب المدرسى

أختر الاجابة الصحيحة من بين الاجابات المعطاة

(١) زاوية الاحتكاك هى ....

(أ) الزاوية المحصورة بين رد الفعل المحصل و رد الفعل العمودى فى حالة الاحتكاك النهائى

(ب) الزاوية المحصورة بين رد الفعل المحصل و قوة الاحتكاك النهائى

(حـ) الزاوية المحصورة بين رد الفعل العمودى و قوة الاحتكاك النهائى

(ء) النسبة بين معامل الاحتكاك السكونى و معامل الاحتكاك الحركى

(٢) معامل الاحتكاك يتوقف على ....

(أ) مساحة سطح التلامس　　(ب) شكل الجسمين

(حـ) طبيعة مادة الجسمين　　(ء) كل ما سبق

(٣) إذا كان : م$_{س}$ ، م$_{ك}$ هما معاملى الاحتكاك السكونى و الحركى على الترتيب لجسمين متلامسين فإن : ....

(أ) م$_{س}$ = م$_{ك}$　　(ب) م$_{ك}$ > م$_{س}$

(حـ) م$_{ك}$ < م$_{س}$　　(ء) لا توجد علاقة بينهما

الحل

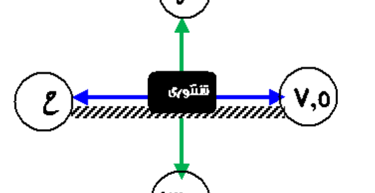
(١) زاوية الاحتكاك هى الزاوية المحصورة بين رد الفعل المحصل و رد الفعل العمودى فى حالة الاحتكاك النهائى

(٢) معامل الاحتكاك يتوقف على طبيعة مادة الجسمين

(٣) إذا كان : م$_{س}$ ، م$_{ك}$ هما معاملى الاحتكاك السكونى و الحركى على الترتيب لجسمين متلامسين فإن : م$_{ك}$ < م$_{س}$

(٤) وضع جسم وزنه ١٣,٥ ث كجم على مستوى أفقى خشن معامل الاحتكاك بينهما $\frac{٢}{٣}$ ، أثرت على الجسم قوة أفقية مقدارها ٧,٥ ث كجم بين هل الجسم يكون على وشك الحركة ؟ فسر اجابتك

الحل



∵ ر = ١٣,٥ ، م$_{س}$ = $\frac{٢}{٣}$

∴ ع$_{س}$ = م$_{س}$ ر = ١٣,٥ × $\frac{٢}{٣}$ = ٩

، ∵ ع = ٧,٥　　∴ ع$_{س}$ > ع

∴ الجسم ساكن (متزن) و ليس على وشك الحركة لأن الاحتكاك غير نهائى

(٥) جسم وزنه ٤٥ ث كجم موضوع على مستوى أفقى خشن معامل الاحتكاك بينه و بين الجسم يساوى $\frac{\sqrt{٣}}{٣}$ أوجد :

(أ) مقدار أقل قوة أفقية تكفى لتحريك الجسم على المستوى

(ب) مقدار و اتجاه رد الفعل المحصل

الحل

(أ) ∵ الجسم متزن　∴ ر = ٤٥

، ق = م$_{س}$ ر = $\frac{\sqrt{٣}}{٣}$ × ٤٥

∴ ق = ١٥ $\sqrt{٣}$ ث كجم

و هى أقل قوة أفقية تكفى لتحريك الجسم على المستوى و عندها يكون الجسم على وشك الحركة

(ب) ر$'$ = ر $\sqrt{١ + م_{س}^{٢}}$ = ٤٥ $\sqrt{١ + \frac{١}{٣}}$ = ٣٠ $\sqrt{٣}$ ث كجم

، ∵ ظا ل = م$_{س}$ = $\frac{\sqrt{٣}}{٣}$　　∴ قياس زاوية الاحتكاك = ٣٠°

أى أن : رد الفعل يصنع مع الرأسى زاوية قياسها ٣٠°

(٦) وضع جسم وزنه ٣٩ نيوتن على مستوى أفقى خشن ، أثرت عليه قوتان مقدارهما ٧ ، ٨ نيوتن و تحصران بينهما زاوية قياسها ٦٠° فأصبح الجسم على وشك الحركة أوجد معامل الاحتكاك السكونى

الحل

القوى المستوية و المتزنة (ق ، ٧ ، ٨) ث جم

تكون : ق محصلة ٧ ، ٨ حيث :

ق² = ٤٩ + ٦٤ + ٢ × ٧ × ٨ × حتا ٦٠°

= ١٦٩ ∴ ق = ١٣ ث جم

، ∵ الجسم على وشك الحركة

∴ ر = ٢٦

، ١٣ = م س ر

∴ ١٣ = م س × ٢٦ ∴ م س = $\frac{١٣}{٢٦}$ = $\frac{١}{٢}$

(٧) وضع جسم وزنه ١٠ ث كجم على مستوٍ يميل على الأفقى بزاوية قياسها ٣٠° فكان الجسم على وشك الانزلاق ، أوجد القوة التى التى تعمل فى اتجاه خط أكبر ميل للمستوى لتجعل الجسم على وشك الحركة إلى أعلى المستوى

الحل

∵ الجسم على وشك الأنزلاق لأسفل المستوى تحت تأثير وزنه فقط

∴ م س = ظا ٣٠° = $\frac{١}{\sqrt{٣}}$

، ∵ الجسم على وشك الحركة لأعلى

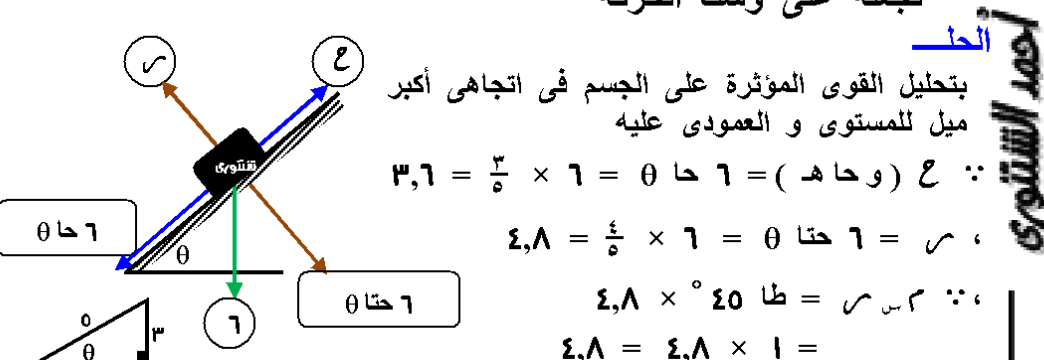
∴ ر = ١٠ حتا ٣٠° = ١٠ × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ = ٥ $\sqrt{٣}$

، ق = م س ر + ١٠ حا ٣٠°

= $\frac{١}{\sqrt{٣}}$ × ٥ $\sqrt{٣}$ + ١٠ × $\frac{١}{٢}$ = ١٠ ث كجم

(٨) وضع جسم وزنه ٦ نيوتن على مستوى خشن يميل على الأفقى بزاوية جيب تمامها $\frac{٤}{٥}$ ، و كان قياس زاوية الاحتكاك بين الجسم و المستوى ٤٥° ، بين أن الجسم يبقى متزناً ثم أوجد مقدار أقل قوة تؤثر على الجسم فى اتجاه خط أكبر ميل للمستوى لأسفل و تجعله على وشك الحركة

الحل



بتحليل القوى المؤثرة على الجسم فى اتجاهى أكبر ميل للمستوى و العمودى عليه

∵ ع (و حا هـ) = ٦ حا θ = ٦ × $\frac{٣}{٥}$ = ٣,٦

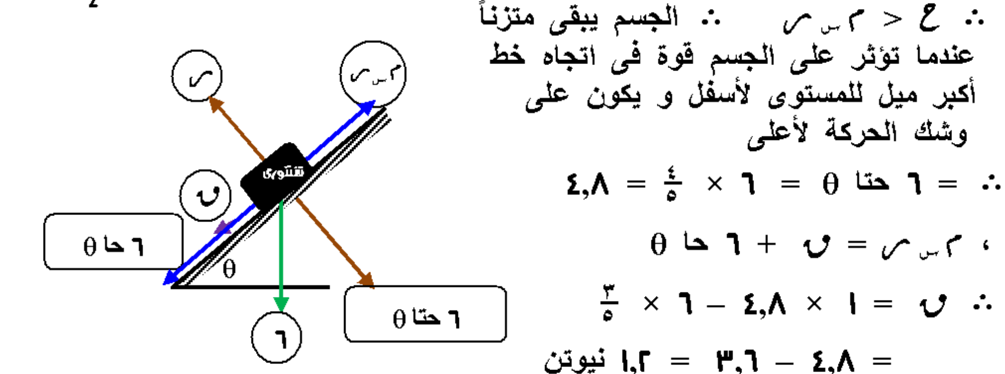
، ر = ٦ حتا θ = ٦ × $\frac{٤}{٥}$ = ٤,٨

، ∵ م س ر = ظا ٤٥° × ٤,٨

= ١ × ٤,٨ = ٤,٨

∴ ع < م س ر ∴ الجسم يبقى متزناً

عندما تؤثر على الجسم قوة فى اتجاه خط أكبر ميل للمستوى لأسفل و يكون على وشك الحركة لأعلى



∴ ر = ٦ حتا θ = ٦ × $\frac{٤}{٥}$ = ٤,٨

، م س ر = ق + ٦ حا θ

∴ ق = ١ × ٤,٨ − ٦ × $\frac{٣}{٥}$

= ٤,٨ − ٣,٦ = ١,٢ نيوتن

اجابة أسئلة الاختبارات الخاصة بالوحدة

الاختبار الأول

السؤال الأول : أختر الاجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة

(١) إذا كانت θ هى قياس الزاوية بين قوة الاحتكاك النهائى و رد الفعل المحصل فإن : معامل الاحتكاك السكونى يساوى ....

(أ) طا θ (ب) حا θ (جـ) حتا θ (ء) ظتا θ

الحل

∵ θ قياس الزاوية بين قوة الاحتكاك النهائى و رد الفعل المحصل

∴ قياس زاوية الاحتكاك = ٩٠° − θ

∴ م س = طا (٩٠° − θ) = ظتا θ

السؤال الثانى :

(٢) وضع جسم وزنه (و) على مستوى خشن يميل على على الأفقى بزاوية قياسها (هـ) فإذا كان قياس زاوية الاحتكاك هو (ل) فاوجد مقدار و اتجاه القوة التى تجعل الجسم على وشك الحركة لأعلى

الحل

نفرض أن : ق تميل على المستوى بزاوية قياسها ى

∵ ل = قياس زاوية الاحتكاك

∴ م س = طا ل = حا ل / حتا ل

، ع س = م س ر = ر حا ل / حتا ل

، ∵ الجسم على وشك الجركة

∴ معادلتا الاتزان هما :

ق حتا ى = و حا هـ + م س ر

= و حا هـ + ر حا ل / حتا ل   بالضرب × حتا ل ينتج :

ق حتا ى حتا ل = و حا هـ حتا ل + ر حا ل   (١)

، ر + ق حا ى = و حتاهـ

∴ ر = و حتاهـ − ق حا ى   بالتعويض من (١) ينتج :

ق حتا ى حتا ل = و حا هـ حتا ل + (و حتاهـ − ق حا ى) × حا ل

∴ ق حتا ى حتا ل = و حا هـ حتا ل + و حتاهـ حا ل − ق حا ى حا ل

∴ ق حتا ى حتا ل + ق حا ى حا ل = و حا هـ حتا ل + و حتاهـ حا ل

∴ ق حتا (ى − ل) = وحا(هـ + ل)   ∴ ق = وحا(هـ + ل) / حتا (ى − ل)

و يكون مقدار ق أقل ما يمكن عندما يكون و حا (ى − ل) أكبر ما يمكن

أى عندما : حتا (ى − ل) = ١ ∴ ى − ل = ٠ أى : ى = ل

∴ أصغر مقدار للقوة = وحا(هـ + ل) و خط عملها يصنع مع المستوى زاوية قياسها = قياس زاوية الاحتكاك

حل آخر

∵ الجسم متزن تحت ثلاث قوى هى :

ق ، و ، ر′ حيث : ر′ محصلة ر ، م س ر

من الشكل المقابل باستخدام قاعدة لامى ينتج :

ق / حا [١٨٠° − (هـ + ل)] = و / حا [٩٠° − (ى − ل)] = ر′ / حا [٩٠° + (ى + هـ)]

∴ ق / حا (هـ + ل) = و / حتا (ى − ل)   ∴ ق = وحا(هـ + ل) / حتا (ى − ل)

و يكون مقدار ق أقل ما يمكن عندما يكون و حا (ى − ل) أكبر ما يمكن

أى عندما : حتا (ى – ل) = ١ ∴ ى – ل = ٠ أى : ى = ل

∴ أصغر مقدار للقوة = و حا (هـ + ل) و خط عملها يصنع مع المستوى زاوية قياسها = قياس زاوية الاحتكاك

الاختبار الثانى

السؤال الأول : أختر الاجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة

(٢) زاوية الاحتكاك هى ....

(أ) الزاوية المحصورة بين رد الفعل العمودى و رد الفعل المحصل

(ب) النسبة بين قوة الاحتكاك النهائى و رد الفعل العمودى

(حـ) النسبة بين معامل الاحتكاك السكونى و معامل الاحتكاك الحركى

(ء) الزاوية المحصورة بين قوة الاحتكاك النهائى و رد الفعل المحصل

الحل

الزاوية المحصورة بين رد الفعل العمودى و رد الفعل المحصل

السؤال الثانى :

(٢) برهن أن : إذا وضع جسم على مستوى مائل خشن و كان الجسم على وشك الانزلاق فإن : قياس زاوية الاحتكاك يساوى قياس زاوية ميل المستوى على الأفقى

الحل

بفرض أن : قياس زاوية الاحتكاك = ل

، قياس زاوية ميل المستوى على الأفقى = θ

∵ الجسم على وشك الانزلاق

∴ معادلتا الاتزان هما :

م$_{س}$ ر = و حا θ ، ر = و حتا θ

∴ و حا θ = م$_{س}$ و حتا θ

= و طا ل حتا θ

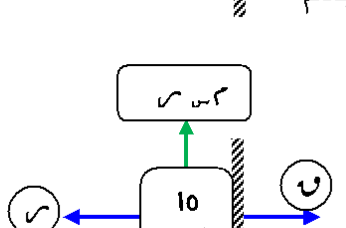
و منها : طا θ = طا ل ∴ θ = ل

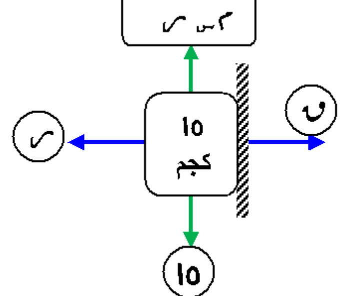
أى أن : قياس زاوية الاحتكاك = قياس زاوية ميل المستوى على الأفقى

الاختبار الثالث

السؤال الأول : أكمل ما يلى

(١) مقدار أقل قوة أفقية ق لازمة لاتزان جسم كتلته ١٥ كجم على حائط رأسى خشن معامل الاحتكاك السكونى بينه و بين الجسم يساوى $\frac{١}{٥}$ .... ث كجم





الحل

معادلتا الاتزان :

ق = ر ، م$_{س}$ ر = ١٥

∴ $\frac{١}{٥}$ ر = ١٥

و منها : ر = ٧٥ ث كجم

∴ ق = ٧٥ ث كجم

السؤال الثانى :

(١) وضع جسم وزنه ٦٦ $\frac{٢}{٣}$ نيوتن على مستوى أفقى خشن معامل الاحتكاك بينهما يساوى $\frac{٣}{٤}$ ، أثرت على الجسم قوة مقدارها ٤٠ نيوتن و تميل على الأفقى بزاوية قياسها θ ، فإذا كان الجسم على وشك الحركة ، فما قيمة θ

الحل

∵ الجسم على وشك الحركة

∴ الاحتكاك نهائى

و معادلتا الأتزان هما :

م_س ر = ٤٠ حتا θ

∴ ٣/٤ ر = ٤٠ حتا θ   (١)

، ر + ٤٠ حا θ = ٦٦ ٢/٣   (٢)   × ٣/٤ ينتج :

٣/٤ ر + ٣٠ حا θ = ٥٠   ، بالتعويض من (١) ينتج :

٤٠ حتا θ + ٣٠ حا θ = ٥٠   × ١/٥٠ ينتج :

٤/٥ حتا θ + ٣/٥ حا θ = ١



∴ حتا β حتا θ + حا β حا θ = حتا ٠°

∴ حتا ٣٦,٨٧° حتا θ + حا ٣٦,٨٧° حا θ = حتا ٠°

∴ حتا (٣٦,٨٧° − θ) = حتا ٠°

∴ ٣٦,٨٧° − θ = ٠°   و منها : θ = ٣٦,٨٧°

حل آخر

نتبع نفس الخطوات : ٤/٥ حتا θ + ٣/٥ حا θ = ١

∴ حا α حتا θ + حتا α حا θ = حا ٩٠°

∴ حا ٥٣,١٣° حتا θ + حتا ٥٣,١٣° حا θ = حا ٩٠°

∴ حا (٥٣,١٣° − θ) = حا ٩٠°

∴ ٥٣,١٣° + θ = ٩٠°   و منها : θ = ٣٦,٧٨°

حل ثالث

من (١) : حتا θ = ٣ ر / ١٦٠   (٣)

∴ حا θ = √(٢٥٦٠٠ − ٩ ر²) / ١٦٠

من (٢) : ٤٠ حا θ = ٦٦ ٢/٣ − ر

∴ ٤٠ × √(٢٥٦٠٠ − ٩ ر²) / ١٦٠ = ٦٦ ٢/٣ − ر   × ١٢   و التربيع ينتج :

٢٣٠٤٠٠ − ٨١ ر² = ٦٤٠٠٠٠ − ١٩٢٠٠ ر + ١٤٤ ر²

∴ ٩ ر² − ٧٦٨ ر + ١٦٣٨٤ = ٠   ∴ (٣ ر − ١٢٨)² = ٠

∴ ر = ٤٢,٦٧   بالتعويض فى (٣) ينتج : θ = ٣٦,٨٧°

حل رابع

من (١) ، (٢) ينتج : ٤٠ حتا θ + ٣٠ حا θ = ٥٠   ÷ ١٠ ينتج :

٤ حتا θ + ٣ حا θ = ٥   ∴ ٤ حتا θ = ٥ − ٣ حا θ

بالتربيع ينتج : ١٦ حتا² θ = ٢٥ − ٣٠٠ حا θ + ٩ حا² θ

١٦ (١ − حا² θ) = ٢٥ − ٣٠ حا θ + ٩ حا² θ

∴ ١٦ − ١٦ حا² θ = ٢٥ − ٣٠ حا θ + ٩ حا² θ

∴ ٢٥ حا² θ − ٣٠ حا θ + ٩ = ٠   ∴ (٥ حا θ − ٣)² = ٠

∴ حا θ = ٣/٥   ∴ θ = ٣٦,٨٧°

حل خامس

من (١) ، (٢) ينتج : ٤٠ حتا θ + ٣٠ حا θ = ٥٠   ÷ ١٠ ينتج :

٤ حتا θ + ٣ حا θ = ٥   ∴ ٣ حا θ = ٥ − ٤ حتا θ



بالتربيع ينتج : $٩ \text{ حا}^٢ \theta = ٢٥ - ٤٠ \text{ حتا } \theta + ١٦ \text{ حتا}^٢ \theta$

$٩ (١ - \text{حتا}^٢ \theta) = ٢٥ - ٤٠ \text{ حتا } \theta + ١٦ \text{ حتا}^٢ \theta$

$\therefore ٩ - ٩ \text{ حتا}^٢ \theta = ٢٥ - ٤٠ \text{ حتا } \theta + ١٦ \text{ حتا}^٢ \theta$

$\therefore ٢٥ \text{ حتا}^٢ \theta - ٤٠ \text{ حتا } \theta + ١٦ = ٠ \quad \therefore (٥ \text{ حتا } \theta - ٤)^٢ = ٠$

$\therefore \text{حتا } \theta = \frac{٤}{٥} \quad \therefore \theta = ٣٦,٨٧^\circ$

الاختبار الرابع

السؤال الأول : أختر الاجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة

(١) معامل الاحتكاك يتوقف على ....

(أ) مساحة سطح التلامس بين الجسمين (ب) شكل الجسمين

(جـ) طبيعة الجسمين (ء) كل ما سبق

الحل

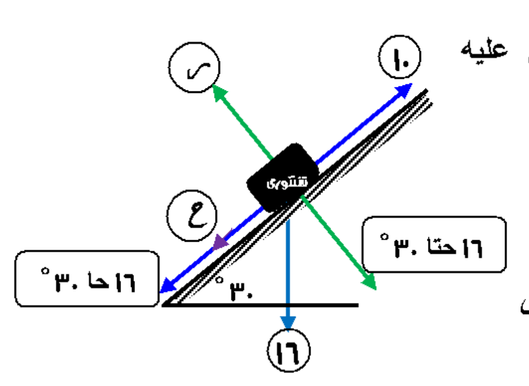
طبيعة الجسمين

السؤال الثانى :

(١) وضع جسم وزنه ١٦ ث كجم على مستوى يميل على الأفقى بزاوية قياسها ٣٠° و معامل الاحتكاك بينه و بين الجسم يساوى $\frac{١}{\sqrt{٣}}$ اثرت على الجسم قوة تعمل فى خط أكبر ميل للمستوى و لأعلى مقدارها ١٠ ث كجم فإذا كان الجسم متزناً عين قوة الاحتكاك و بين ما إذا كان الجسم على وشك الحركة أو لا ؟

الحل

بتحليل القوى المؤثرة على الجسم فى اتجاهى أكبر ميل للمستوى و العمودى عليه



$\therefore$ و حا θ = ١٦ حا ٣٠°

$= ١٦ \times \frac{١}{٢} = ٨$

، $\because$ ق = ١٠

$\therefore$ ق > و حا θ

$\therefore$ الحركة المحتملة للجسم تكون إلى أعلى المستوى ،

فتكون قوة الاحتكاك ح لأسفل

، معادلات اتزان الجسم هى :

١٠ = ح + ١٦ حا ٣٠°

$\therefore$ ١٠ = ح + ١٦ × $\frac{١}{٢}$ و منها : ح = ٢ ث كجم

، ر = ١٦ حتا ٣٠° = ١٦ × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ = ٨ $\sqrt{٣}$

، $\because$ $م_س$ ر = $\frac{١}{\sqrt{٣}}$ × ٨ $\sqrt{٣}$ = ٨

$\therefore$ ح < $م_س$ ر $\therefore$ الجسم متزن و ليس على وشك الحركة

الاختبار الخامس

السؤال الأول : أكمل ما يلى :

(أ) معامل الاحتكاك السكونى هو النسبة بين ....

الحل

قوة الاحتكاك النهائى و رد الفعل العمودى

السؤال الثانى :

(أ) وضع جسم وزنه ٥٠ نيوتن على مستوى يميل على الأفقى بزاوية قياسها θ ، فإذا كان أقل و أكبر قوة موازية لخط أكبر ميل و تجعل الجسم متزناً على المستوى هما ١٠ ، ٤٠ نيوتن على الترتيب اوجد معامل الاحتكاك و قياس زاوية ميل المستوى على الأفقى

الحل

فى الحالة الأولى (أقل قوة)

القضيب يكون على وشك الحركة لأسفل

∴ من الشكل المقابل معادلات الاتزان هى :

١٠ + مس ر = ٥٠ حا θ

، ر = ٥٠ حتا θ

∴ ١٠ + ٥٠ ر حتا θ = ٥٠ حا θ

∴ ٥٠ ر حتا θ = ٥٠ حا θ − ١٠ (أ)

فى الحالة الثانية (أكبر قوة)

القضيب يكون على وشك الحركة لأعلى

∴ من الشكل المقابل معادلات الاتزان هى :

٤٠ = مس ر + ٥٠ حا θ

، ر = ٥٠ حتا θ

∴ ٤٠ = ٥٠ ر حتا θ + ٥٠ حا θ

بالتعويض من (أ) ينتج :

٤٠ = ٥٠ حا θ − ١٠ + ٥٠ حا θ　　و منها ينتج :

∴ ٥٠ = ١٠٠ حا θ　　∴ حا θ = $\frac{1}{2}$　　∴ θ = ٣٠°

∴ ر = ٥٠ حتا ٣٠° = ٥٠ × $\frac{\sqrt{3}}{2}$ = ٢٥ $\sqrt{3}$ نيوتن ،

مس × ٢٥ $\sqrt{3}$ = ٥٠ × $\frac{1}{2}$ − ١٠

∴ مس × ٢٥ $\sqrt{3}$ = ١٥　　و منها : مس = $\frac{1}{5}\sqrt{3}$





المتميز

فى

الرياضيات التطبيقية

الأستاتيكا

الجزء النظرى

و

حلول التمارين

الوحدة الثانية

م س ر	جو	(سم ، صم)	‖ ق ‖

إعداد : أحمد الشنتورى

الصف الثالث الثانوى

القسم العلمى

شعبة الرياضيات

٢٠١٧ / ٢٠١٨

الوحدة الثانية .... العزوم

٢ – ١ عزم قوة بنسبة لنقطة فى نظام احداثى ثنائى الأبعاد

تمهيد :

نعلم أن القوة تنتج من تأثير جسم طبيعى على جسم طبيعى آخر و هذا التأثير ينتج عنه صور مختلفة (تأثير حركة ، تأثير شكلى ، ....)

و من أنواع الحركة :

الحركة الانتقالية : و فيها تتحرك جميع أجزاء الجسم من موضع إلى آخر مسافات متساوية فى اتجاه القوة المحدثة للحركة

فكل شئ من حولنا فى حالة حركة فالشمس تتحرك فى الفضاء ، و الأشجار تتحرك بفضل الرياح ، ....

و يكون تأثير القوة هنا تأثيراً حركياً انتقالياً

الحركة الدورانية : و فيها تتحرك جميع أجزاء الجسم على أقواس دائرية لها نفس المركز

مثل حركة الكواكب و المراوح و عقارب الساعة ، ....

و يكون تأثير القوة هنا تأثيراً حركياً دورانياً أى أن القوة قادرة على على احداث دوران للجسم حول نقطة و هو ما يعرف : بـ **عزم القوة حول نقطة** ، و يعتمد هذا التأثير الدورانى (العزم) على مقدار القوة و على بعد خط عمل القوة عن هذه النقطة

عزم قوة حول نقطة فى نظام احداثى متعامد ثنائى الابعاد :

يعرف عزم القوة $\vec{\text{ق}}$ حول نقطة (و) بأنه مقدرة القوة على احداث دوران للجسم حول نقطة (و)

و يمكن حساب هذا التأثير الدورانى من العلاقة : $\vec{\text{ج}}_{\text{و}} = \vec{\text{ر}} \times \vec{\text{ق}}$

حيث : $\vec{\text{ر}}$ متجه موضع نقطة أ على خط عمل القوة بالنسبة للنقطة (و) ، تسمى النقطة (و) مركز العزم ، و يسمى المستقيم المار بالنقطة (و) و عمودياً على المستوى الذى يحوى القوة $\vec{\text{ق}}$ و النقطة (و) بمحور العزم

ملاحظة :

عزم القوة هو كمية متجهة و طبقاً لقاعدة اليد اليمنى للضرب الاتجاهى يكون متجه عزم القوة بالنسبة للنقطة (و) عمودياً على المستوى الذى يحوى القوة $\vec{\text{ق}}$ و النقطة (و)

إجابة تفكير ناقد صفحة ٧

هل يتوقف عزم القوة $\vec{\text{ق}}$ بالنسبة للنقطة (و) على موضع النقطة أ على خط عمل القوة

الحل

$\because \vec{\text{ر}}_1 = \overrightarrow{\text{و}\text{أ}_1} = \overrightarrow{\text{و}\text{أ}_2} + \overrightarrow{\text{أ}_2\text{أ}_1} = \vec{\text{ر}}_2 + \overrightarrow{\text{أ}_2\text{أ}_1}$

$= (\overrightarrow{\text{و}\text{أ}_3} + \overrightarrow{\text{أ}_3\text{أ}_2}) + \overrightarrow{\text{أ}_2\text{أ}_1} = \vec{\text{ر}}_3 + \overrightarrow{\text{أ}_3\text{أ}_2} + \overrightarrow{\text{أ}_2\text{أ}_1} = \vec{\text{ر}}_3 + \overrightarrow{\text{أ}_3\text{أ}_1}$

$\therefore \vec{\text{ر}}_1 \times \vec{\text{ق}} = (\vec{\text{ر}}_2 + \overrightarrow{\text{أ}_2\text{أ}_1}) \times \vec{\text{ق}}$

$= \vec{\text{ر}}_2 \times \vec{\text{ق}} + \overrightarrow{\text{أ}_2\text{أ}_1} \times \vec{\text{ق}}$ " خاصية التوزيع "

$= \vec{\text{ر}}_2 \times \vec{\text{ق}} + \vec{0} = \vec{\text{ر}}_2 \times \vec{\text{ق}}$ " لأن : $\overrightarrow{\text{أ}_2\text{أ}_1} \parallel \vec{\text{ق}}$ "

$= (\vec{\text{ر}}_3 + \overrightarrow{\text{أ}_3\text{أ}_1}) \times \vec{\text{ق}}$

$= \vec{\text{ر}}_3 \times \vec{\text{ق}} + \overrightarrow{\text{أ}_3\text{أ}_1} \times \vec{\text{ق}}$ " خاصية التوزيع "

$= \vec{\text{ر}}_3 \times \vec{\text{ق}} + \vec{0} = \vec{\text{ر}}_3 \times \vec{\text{ق}}$ " لأن : $\overrightarrow{\text{أ}_3\text{أ}_1} \parallel \vec{\text{ق}}$ "

$\therefore \vec{\text{ر}}_1 \times \vec{\text{ق}} = \vec{\text{ر}}_2 \times \vec{\text{ق}} = \vec{\text{ر}}_3 \times \vec{\text{ق}} = \vec{\text{ج}}_{\text{و}}$

مفاهيم أساسية :

[أ] عزم قوة بالنسبة إلى نقطة :

من تعريف الضرب الاتجاهى لمتجهين فإن :

ج‌و = (|| ر || || ق || حا θ) ى

حيث : ى متجه وحدة عمودى على مستوى ر ، ق بحيث يكون الدوران من ر إلى ق فى اتجاه ى

، θ هى قياس الزاوية بين ، بفرض : || ق || = ق ،

|| ر || حا θ = ل حيث : ل طول العمود الساقط من (و) على خط عمل ق (ل يسمى ذراع العزم)

فإن : عزم ق حول نقطة (و) هو : ج‌و = (ق ل) ى (أ)

[٢] القياس الجبرى للعزم :

إذا كانت القوة ق تعمل على الدوران حول (و) فى عكس اتجاه دوران عقارب الساعة كان القياس الجبرى لمتجه العزم موجباً (متجه العزم فى اتجاه ى) أى أن : ج‌و = ق ل

و إذا كانت القوة ق تعمل على الدوران حول (و) فى اتجاه دوران عقارب الساعة كان القياس الجبرى لمتجه العزم سالباً (متجه العزم فى اتجاه – ى) أى أن : ج‌و = – ق ل

[٣] معيار العزم :

من (أ) : معيار العزم هو || ج‌و || = ق ل

[٤] عزم قوة نقطة على خط عملها :

عزم قوة نقطة على خط عملها = صفر

فى الشكل المقابل :

∵ خط عمل القوة يمر بالنقطة (و) ∴ ج‌و = صفر

[٥] وحدة قياس مقدار العزم :

وحدة قياس مقدار العزم

= وحدة قياس مقدار القوة × وحدة قياس الطول

و منها : نيوتن . متر ، داين . كم ، ث كجم . متر ، ....

ملاحظات :

(أ) لاحظ الفرق بين :

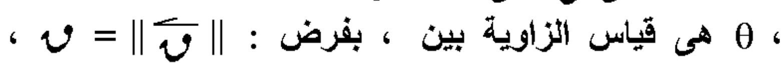
١) ج‌و : متجه العزم و هو كمية متجهة

٢) ج‌و : القياس الجبرى لمتجه العزم و هو كمية قياسية قد تكون موجبة أو سالبة أو صفراً

٣) || ج‌و || : معيار العزم و هو كمية موجبة دائماً حيث :

|| ج‌و || = || ر × ق || أو || ج‌و || = | ج‌و |

٤) إذا كانت : { س ، ص ، ع } مجموعة يمينية من متجهات الوحدة ، (و) نقطة الأصل ، و إذا أثرت قوة ق = أ‌١ س + ب‌١ ص عند النقطة حـ (أ‌٢ ، ب‌٢)



فإن : $\overrightarrow{ج}_{و} = \overrightarrow{وحـ} \times \overrightarrow{ق}$

$= (أ_١ \overrightarrow{س} + ب_١ \overrightarrow{ص}) \times (أ_٢ \overrightarrow{س} + ب_٢ \overrightarrow{ص})$

$= (أ_١ ب_٢ - أ_٢ ب_١) \overrightarrow{ع}$

و يكون : $ج_{و}$ [القياس الجبرى لعزم $\overrightarrow{ق}$ حول (و)]

$= أ_١ ب_٢ - أ_٢ ب_١$

٥) طول العمود المرسوم من النقطة (و) على خط عمل القوة

$$\overrightarrow{ق} (ل) = \frac{\| \overrightarrow{ج}_{و} \|}{\| \overrightarrow{ق} \|}$$

إجابة حاول أن تحل (أ) صفحة ٢٦

إذا كانت : { $\overrightarrow{س}$ ، $\overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ع}$ } مجموعة يمينية من متجهات الوحدة

و كانت القوة $\overrightarrow{ق} = \overrightarrow{س} - ٢ \overrightarrow{ص}$ تؤثر فى النقطة أ (٢ ، ٣)

أوجد : (أ) عزم $\overrightarrow{ق}$ بالنسبة للنقطة ب (٢ ، ١)

(ب) طول العمود الساقط من نقطة ب على خط عمل القوة

الحل

(أ) $\overrightarrow{ر} = \overrightarrow{ب أ} = \overrightarrow{أ} - \overrightarrow{ب} = (٢ ، ٣) - (٢ ، ١) = (٠ ، ٢)$

$\therefore \overrightarrow{ج}_{ب} = \overrightarrow{ر} \times \overrightarrow{ق} = (٠ ، ٢) \times (١ ، -٢) = (٠ \times (-٢) - ٢ \times ١) \overrightarrow{ع}$

$= -٢ \overrightarrow{ع}$

(ب) طول العمود الساقط من نقطة ب على خط عمل القوة $= \frac{\| \overrightarrow{ج}_{و} \|}{\| \overrightarrow{ق} \|}$

$= \frac{١}{\sqrt{١ + ٤}} = \frac{١}{\sqrt{٥}} = ٠,٤٥$

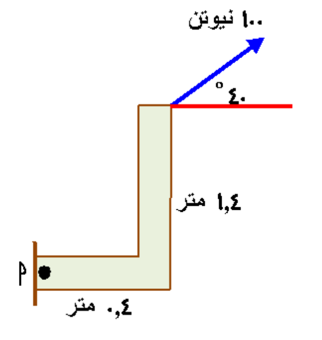
إجابة تفكير صفحة ٢٦

إذا تلاشى عزم قوة حول نقطة ، ماذا يعنى ذلك ؟

الحل

إذا تلاشى عزم قوة حول نقطة فإن خط عمل القوة يمر بهذه النقطة

مبدأ العزوم (نظرية فارينون) :



عزم القوة $\overrightarrow{ق}$ بالنسبة لنقطة يساوى مجموع عزوم مركبات هذه القوة بالنسبة لنفس النقطة

بفرض القوة $\overrightarrow{ق} = ق_{س} \overrightarrow{س} + ق_{ص} \overrightarrow{ص}$

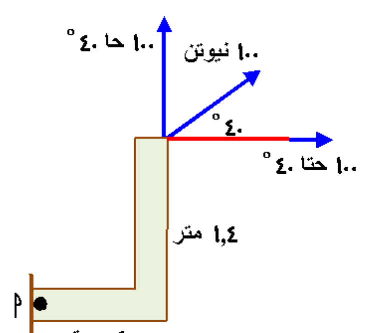
تؤثر فى نقطة أ متجه موضعها بالنسبة للنقطة (و) هو $\overrightarrow{ر} = (س ، ص)$ فإن :

$\overrightarrow{ج}_{و} = \overrightarrow{ر} \times \overrightarrow{ق} = (س ، ص) \times (ق_{س} ، ق_{ص})$

$= س \, ق_{ص} \overrightarrow{ع} + (- ص \, ق_{س}) \overrightarrow{ع}$

$=$ عزم $ق_{ص}$ حول (و) + عزم $ق_{س}$ حول (و)

إجابة حاول أن تحل (٢) صفحة ٢٧



فى الشكل المقابل :

احسب القياس الجبرى لعزم القوة ١٠٠ نيوتن بالنسبة لنقطة أ

الحل

بتحليل القوة ١٠٠ نيوتن إلى مركبتين

$ق_١ = ١٠٠$ حتا $٤٠° = ٧٦,٦$ ،

$ق_٢ = ١٠٠$ حا $٤٠° = ٦٤,٢٨$

و طبقاً لنظرية فارينون يكون :

$ج_{أ} = ق_٢ \times ٠,٤ - ق_١ \times ١,٤$

$= ٦٤,٢٨ \times ٠,٤ - ٧٦,٦ \times ١,٤$

$= - ٨١,٥$ نيوتن . متر

حل آخر

من هندسة الشكل المقابل :

(أ ب)² = (١,٤)² + (٠,٤)² = ٢,١٢

∴ أ ب = ١,٤٥٦ متر ،

طا β = ٤/١٠ ÷ ١٤/١٠ = ٤/١٠ × ١٠/١٤ = ٠,٢٨٥٧

∴ β = ١٥,٩٤٥٤° ، θ = ٥٠° − ١٥,٩٤٥٤° = ٣٤,٠٥٤٦°

∴ ل = ١,٤٥٦ × جا ٣٤,٠٥٤٦° = ٠,٨١٥

∴ ع_أ = − ق × ل = − ١٠٠ × ٠,٨١٥ = − ٨١,٥ نيوتن . متر

نظرية :

مجموع عزوم عدة قوى مستوية متلاقية فى نقطة بالنسبة لأى نقطة فى الفراغ يساوى عزم محصلة هذه القوى بالنسبة للنقطة نفسها

البرهان :

بفرض ق١ ، ق٢ ، .... ، قن مجموعة محدودة من القوى تؤثر فى نقطة أ و بفرض (و) النقطة المطلوب ايجاد العزوم عندها ∴ ر = و أ

مجموع عزوم القوى بالنسبة للنقطة (و)

= ر × ق١ + ر × ق٢ + ... + ر × قن

= ر × (ق١ + ق٢ + ... + قن) = ر × ح

= عزم محصلة هذه القوى بالنسبة للنقطة نفسها (و)

النظرية العامة للعزوم :

المجموع الجبرى لعزوم مجموعة من القوى حول نقطة ما يساوى عزم المحصلة حول نفس النقطة

إجابة حاول أن تحل (٣) صفحة ٢٨

تؤثر القوى : ق١ = ٣ س − ص ، ق٢ = − ٢ س − ٣ ص فى النقطة أ (− ٢ ، ٤) أوجد مجموع عزوم هذه القوى حول نقطة ب (١ ، ١) ثم أوجد عزم محصلة هذه القوى حول نقطة ب

الحل

∵ ر = ب أ = أ − ب = (− ٢ ، ٤) − (١ ، ١) = (− ٢ ، ٣)

∴ مجموع عزوم القوى حول نقطة ب = ر × ق١ + ر × ق٢

= (− ٢ ، ٣) × (٣ ، − ١) + (− ٢ ، ٣) × (− ٢ ، − ٣)

= (٢ − ٩) ع + (٦ + ٦) ع = − ٧ ع + ١٢ ع = ٥ ع

∵ ح = ق١ + ق٢ = (٣ ، − ١) + (− ٢ ، − ٣) = (١ ، − ٤)

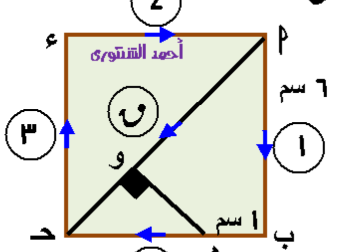
∴ عزم المحصلة حول نقطة ب = ر × ح = (− ٢ ، ٣) × (١ ، − ٤)

= (٨ − ٦) ع = ٥ ع

إجابة حاول أن تحل (٤) صفحة ٢٩

أ ب ح ء مربع طول ضلعه ٦ سم ، هـ ∈ ب ح بحيث : ب هـ = ٤ سم ، أثرت قوى مقاديرها ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ق نيوتن فى أ ب ، ب ح ، ح ء ، ء أ ، أ ح على الترتيب فإذا كان خط عمل المحصلة يمر بالنقطة هـ أوجد قيمة ق

الحل



من هندسة الشكل : ح هـ = ٥ سم

هـ و = ٥ جا ٤٥° = ٥ × ١/√٢ = ٥/٢ √٢

∵ خط عمل المحصلة يمر بالنقطة هـ ، ∴ ع_هـ = صفر

∴ − ١ × ١ − ٤ × ٦ − ٣ × ٥ + ق × ٥/٢ √٢ = ٠

∴ ٥/٢ √٢ ق = ٤٠ ومنها : ق = ٨ √٢ نيوتن

ملاحظة :

تتغير إشارة القياس الجبرى للعزوم فقط عند رسم الشكل الهندسى بحسب دوران رؤوسه مع (أو عكس) اتجاه دوران عقارب الساعة

نتائج :

(١) إذا كان : عزم قوة حول نقطة ب = عزم قوة حول نقطة حـ
فإن : خط عمل القوة // ب حـ

(٢) إذا كان : عزم قوة حول نقطة ب = ـ عزم قوة حول نقطة حـ
فإن : خط عمل القوة ينصف ب حـ

و بصفة عامة :

إذا أثرت عدة قوى مستوية على جسم و كانت ب ، حـ نقطتين فى نفس المستوى

(١) فإذا كان : مجموع عزوم القوى حول نقطة ب = مجموع عزوم القوى حول نقطة حـ فإن : خط عمل المحصلة // ب حـ

(٢) فإذا كان : مجموع عزوم القوى حول نقطة ب = مجموع عزوم القوى حول نقطة حـ فإن : خط عمل المحصلة ينصف ب حـ

ملاحظة :

إذا كان : مجموع عزوم القوى حول نقطة ما و لتكن ء ينعدم فإن : إما ء تقع على خط عمل المحصلة أو أن المحصلة هى المتجه الصفرى

إجابة حاول أن تحل (٥) صفحة ٢٩

تؤثر القوة ق فى النقطة أ (ـ ٣ ، ٢) فإذا عزم ق حول كل من النقطتين ب (٣ ، ١) ، حـ (ـ ١ ، ٤) يساوى ٢٨ ع أوجد ق

الحل

بفرض أن : ق = ك س + ل ص

ر١ = ب أ = أ − ب = (ـ ٣ ، ٢) − (٣ ، ١) = (ـ ٦ ، ١)

∴ جـب = ر١ × ق = (ـ ٦ ، ١) × (ك ، ل) = (ـ ٦ ل − ك) ع

∴ ـ ٦ ل − ك = ٢٨ (١)

، ر٢ = حـ أ = أ − حـ = (ـ ٣ ، ٢) − (ـ ١ ، ٤) = (ـ ٢ ، ـ ٢)

∴ جـحـ = ر٢ × ق = (ـ ٢ ، ـ ٢) × (ك ، ل) = (ـ ٢ ل + ٢ ك) ع

∴ ـ ٢ ل + ٢ ك = ٢٨ (٢) ، بضرب (١) × ٢ و جمعها مع (٢) ينتج :

ل = ـ ٦ ، بالتعويض فى (١) ينتج : ك = ٨

∴ ق = ٨ س ـ ٦ ص

إجابة حاول أن تحل (٦) صفحة ٣٠

تؤثر القوى : ق١ = س + ٢ ص ، ق٢ = ٣ س − ص فى النقطة أ (ـ ٢ ، ٣) برهن باستخدام العزوم أن خط عمل المحصلة ينصف القطعة المستقيمة المرسومة بين النقطتين ب (ـ ١ ، ٥) ، حـ (١ ، ٢)

الحل

∵ ح = ق١ + ق٢ = (١ ، ٢) + (٣ ، ـ ١) = (٤ ، ١)

، ر١ = ب أ = أ − ب = (ـ ٢ ، ٣) − (ـ ١ ، ٥) = (ـ ١ ، ـ ٢)

∴ جـب = ر١ × ح = (ـ ١ ، ـ ٢) × (٤ ، ١) = ٧ ع

، ∵ ر٢ = حـ أ = أ − حـ = (ـ ٢ ، ٣) − (١ ، ٢) = (ـ ٣ ، ١)

∴ جـحـ = ر٢ × ح = (ـ ٣ ، ١) × (٤ ، ١) = ـ ٧ ع

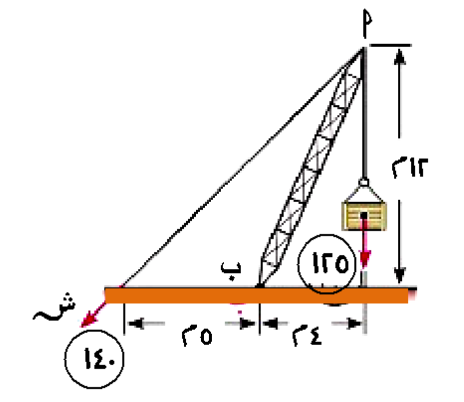
∴ جـب = ـ جـحـ ، ح ≠ ٠

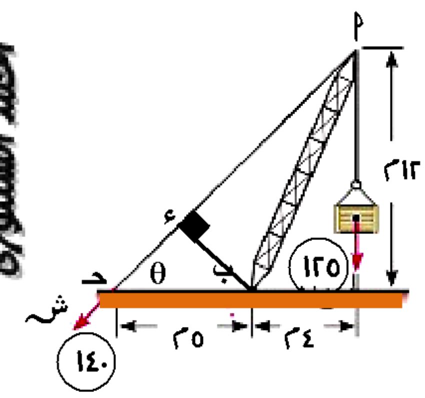
∴ خط عمل المحصلة ينصف القطعة المستقيمة المرسومة بين النقطتين ب ، حـ

إجابة حاول أن تحل (٧) صفحة ٣٠

في الشكل المقابل :

$\overline{أ ب}$ تمثل رافعة لرفع البضائع إذا كان الشد في الخيط يساوي ١٤٠ نيوتن ، و وزن الصندوق ١٢٥ نيوتن أوجد : مجموع عزمي القوتين بالنسبة للنقطة ب





الحل

من هندسة الشكل :

$(أ حـ)^2 = (١٢)^2 + (٩)^2 = ٢٢٥$

∴ أ حـ = ١٥ متر ،

ب ء = ٥ جا θ = ٥ × $\frac{١٢}{١٥}$

ع$_{ب}$ = − ١٢٥ × ٤ + ١٤٠ × ٥ × $\frac{١٢}{١٥}$

= − ٥٠٠ + ٥٦٠

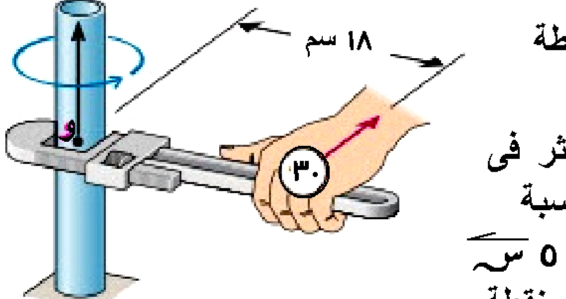
= ٦٠ نيوتن . م

حل تمارين (٢ – ١) صفحة ٣١ بالكتاب المدرسي

أكمل ما يلي :

(١) قوة مقدارها ٥٠ نيوتن و تبعد عن نقطة أ مسافة ٨ سم فإن معيار عزم القوة حول نقطة أ يساوي .... نيوتن . سم

(٢) في الشكل المقابل : معيار عزم القوة حول نقطة الأصل (و) يساوي ....



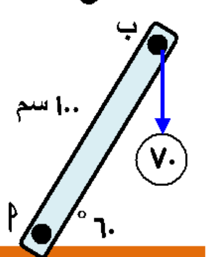
(٣) قوة : ٤ $\overleftarrow{ص}$ نيوتن تؤثر في نقطة متجه موضعها بالنسبة إلى نقطة الأصل يساوي ٥ $\overleftarrow{س}$ متر فإن عزم القوة حول نقطة الأصل يساوي ....



(٤) إذا كان عزم قوة حول نقطة ما يساوي صفراً فإن ذلك يعني ....

(٥) إذا كان عزم القوة ثابتاً فإن مقدار القوة يتناسب عكسياً مع ....

(٦) في الشكل المقابل : قضيب مثبت بمفصل عند أ أثرت على الطرف ب قوة رأسية لأسفل مقدارها ٧٠ نيوتن فإن معيار عزم القوة حول نقطة أ يساوي .... نيوتن . متر



الحل

(١) معيار عزم القوة حول نقطة أ = ٥٠ × ٨ = ٤٠٠ نيوتن . سم

(٢) معيار عزم القوة حول نقطة الأصل (و) = ٣٠ × ١٨ = ٥٤٠

(٣) عزم القوة حول نقطة الأصل = ٥ $\overleftarrow{س}$ × ٤ $\overleftarrow{ص}$ = ٢٠ $\overleftarrow{ع}$

(٤) إذا كان عزم قوة حول نقطة ما يساوي صفراً فإن ذلك يعني خط عمل القوة يمر بهذه النقطة

(٥) ∵ ق = ج / ل ، ج ثابت　　∴ ق ∝ ١ / ل

∴ مقدار القوة يتناسب عكسياً مع بعد النقطة عن خط عمل القوة

(٦) معيار عزم القوة حول نقطة أ = ٧٠ × ١٠٠ حتا ٦٠° = ٧٠ × ١٠٠ × ١/٢

= ٣٥٠٠ نيوتن . سم = ٣٥ نيوتن . متر

أختر الاجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة

(٧) الأشكال التالية تمثل باب متصل بمفصل عند أ ، أثرت عليه قوة $\overrightarrow{ق}$ أى منها تكون القوة $\overrightarrow{ق}$ لها أكبر عزم عند أ ....

(أ)　　(ب)　　(ج)　　(د)

(٨) قضيب طوله ل يمكنه الدوران بسهولة حول نقطة عند أحد نهايتيه ، أثرت على نهايته الأخرى قوة مقدارها ق و تميل على القضيب بزاوية قياسها θ ، إذا كانت $\overrightarrow{ق}$ يجب أن تكون عمودية على القضيب فعلى أى بعد من مركز الدوران يمكن أن تؤثر ق بحيث يكون لها نفس العزم ....

مركز الدوران

(أ) ل حا θ　　(ب) ل حتا θ　　(ج) ل　　(د) ل طا θ

(٩) إذا كان : عزم $\overrightarrow{ق}$ حول النقطة أ يساوى عزمها حول النقطة ب فإن : ....

(أ) $\overrightarrow{ق}$ ⊥ $\overline{أ ب}$　　(ب) $\overrightarrow{ق}$ تنصف $\overline{أ ب}$

(ج) $\overrightarrow{ق}$ // $\overline{أ ب}$　　(د) لا توجد علاقة بين $\overline{أ ب}$ ، $\overrightarrow{ق}$

الحل

(٧) بفرض أن بعد خط عمل القوة عن أ = ل ، θ قياس الزاوية بين خط عمل القوة و الباب فيكون :

الشكل (ب) : معيار العزم = ق ل حا ٩٠° = ق ل ، هو له أكبر عزم

أما الشكل (أ) : معيار العزم = ق ل حا ٠° = صفر

(خط عمل القوة يمر بنقطة أ)

الشكل (ج) : ٠ < ق ل حا θ < ١　　" لأن : θ حادة "

الشكل (د) : ق ل حا θ < ٠　　" لأن : θ منفرجة "

(٨) ∵ معيار العزم = ق ل حا θ

∴ إذا كانت $\overrightarrow{ق}$ عمودية يجب أن تكون على = ل حا θ من مركز الدوران بحيث يكون لها نفس العزم

(٩) ∵ عزم $\overrightarrow{ق}$ حول النقطة أ يساوى عزمها حول النقطة ب　∴ $\overrightarrow{ق}$ // $\overline{أ ب}$

ثانياً : أجب عن الأسئلة الآتية :

(١٠) تؤثر القوى : $\overrightarrow{ق}_١$ = م $\overrightarrow{س}$ + ٢ $\overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ق}_٢$ = ل $\overrightarrow{س}$ − $\overrightarrow{ص}$ فى النقطة $أ_١$ (١ ، ١) ، $أ_٢$ (−١ ، −٢) على الترتيب ، عين قيمة كل من الثابتين م ، ل بحيث ينعدم مجموع عزمى هاتين القوتين حول نقطة الأصل و بالنسبة لنقطة ب (٢ ، ٣)

الحل

∵ $\overrightarrow{ر}_١$ = (١ ، ١) − (٠ ، ٠) = (١ ، ١)

، $\overrightarrow{ر}_٢$ = (−١ ، −٢) − (٠ ، ٠) = (−١ ، −٢)

، ∵ $\overrightarrow{ج}_و$ = $\overrightarrow{٠}$　　∴ (١ ، ١) × (م ، ٢) + (−١ ، −٢) × (ل ، −١) = $\overrightarrow{٠}$

∴ ٢ − م + ١ + ٢ ل = ٠　　∴ ٢ ل − م = −٣　　(١)

، ∵ $\overrightarrow{ر}_٣$ = (١ ، ١) − (٢ ، ٣) = (−١ ، −٢)

، $\overrightarrow{ر}_٤$ = (−١ ، −٢) − (٢ ، ٣) = (−٣ ، −٥)

∵ $\overline{ج}_ب = \overline{٠}$ ، ∴ $(-١ ، -٢) \times (م ، ٢) + (-٣ ، -٥) \times (ل ، -١) = \overline{٠}$

∴ $-٢ + ٢م + ٣ + ٥ل = ٠$ ∴ $٥ل + ٢م = -١$ (٢)

بضرب (١) × ٢ و جمعها مع (٢) ينتج : $ل = -\frac{٧}{٩}$

، بالتعويض فى (١) ينتج : $م = \frac{١٣}{٩}$

(١١) القوى : $\overline{ق}_١ = ٢\overline{س} - \overline{ص}$ ، $\overline{ق}_٢ = ٥\overline{س} + ٢\overline{ص}$

$\overline{ق}_٣ = -٣\overline{س} + ٢\overline{ص}$ تؤثر فى النقطة أ (١ ، ١) برهن باستخدام العزوم أن خط عمل المحصلة يوازى المستقيم المار بالنقطتين ب (٢ ، ١) ، حـ (٦ ، ٤)

الحل

∵ $\overline{ح} = \overline{ق}_١ + \overline{ق}_٢ + \overline{ق}_٣ = (٢ ، -١) + (٥ ، ٢) + (-٣ ، ٢) = (٤ ، ٣)$

، $\overline{ر}_١ = \overline{ب أ} = \overline{أ} - \overline{ب} = (١ ، ١) - (٢ ، ١) = (-١ ، ٠)$

∴ $\overline{ج}_ب = \overline{ر}_١ \times \overline{ح} = (-١ ، ٠) \times (٤ ، ٣) = -٣\overline{ع}$

، ∵ $\overline{ر}_٢ = \overline{حـ أ} = \overline{أ} - \overline{حـ} = (١ ، ١) - (٦ ، ٤) = (-٥ ، -٣)$

∴ $\overline{ج}_{حـ} = \overline{ر}_٢ \times \overline{ح} = (-٥ ، -٣) \times (٤ ، ٣) = -٣\overline{ع}$

∴ $\overline{ج}_ب = \overline{ج}_{حـ}$ ، $\overline{ح} \neq \overline{٠}$

∴ خط عمل المحصلة يوازى المستقيم المار النقطتين ب ، حـ

(١٢) الشكل المقابل : يمثل شخص يحمل بيده ثقل ، فإذا كان معيار عزم الثقل حول نقطة أ يساوى ٨٠ نيوتن . متر ، أوجد عزم الثقل حول نقطة ب



الحل

∵ $ج_أ = ٨٠$ نيوتن . متر

∴ ٨٠ = ق × أ ل

∴ ٨٠ = ق × أ حـ حتا ٤٠°

∴ ٨٠ = ق × ٣٥ × حتا ٤٠°

∴ ٨٠ = ق × ٢٦٫٨

و منها : ق = ٢٫٩٨ نيوتن

∴ $ج_ب$ = ٢٫٩٨ × ب ه = ٢٫٩٨ × (ب ء + ء ه)

= ٢٫٩٨ × (ب ء + أ ل)

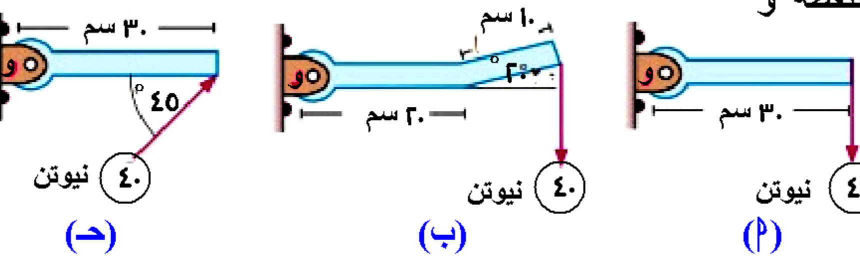
= ٢٫٩٨ × (أ ب حتا ٣٠° + أ حـ حتا ٤٠°)

∴ $ج_ب$ = ٢٫٩٨ × (٢٧ × حتا ٣٠° + ٣٥ × حتا ٤٠°)

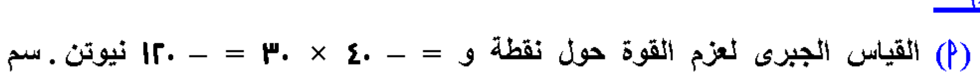
= ١٤٩٫٧٦٨٩ نيوتن . متر



(١٣) فى كل من الأشكال الآتية أوجد القياس الجبرى لعزم القوة حول النقطة و



(أ) (ب) (حـ)



الحل

(أ) القياس الجبرى لعزم القوة حول نقطة و = − ٤٠ × ٣٠ = − ١٢٠ نيوتن . سم

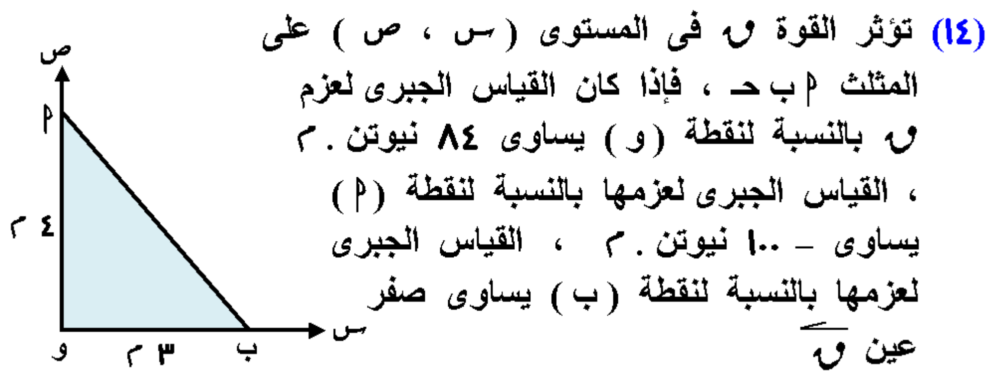
(ب) القياس الجبرى لعزم القوة حول نقطة و = − ٤٠ × (٢٠ + ١٠ × حتا ٢٠°)

= − ١١٧٥٫٨٨ نيوتن . سم

(حـ) القياس الجبرى لعزم القوة حول نقطة و = ٤٠ × ٣٠ × حا ٤٥°

= ٦٠٠ $\sqrt{٢}$ نيوتن . سم

(١٤) تؤثر القوة ق في المستوى (س ، ص) على المثلث ا ب حـ ، فإذا كان القياس الجبرى لعزم ق بالنسبة لنقطة (و) يساوى ٨٤ نيوتن.م ، القياس الجبرى لعزمها بالنسبة لنقطة (ا) يساوى −١٠٠ نيوتن.م ، القياس الجبرى لعزمها بالنسبة لنقطة (ب) يساوى صفر عين $\overleftarrow{ق}$



الحل

نفرض أن : $\overleftarrow{ق}$ = (ك ، ل) ، من الشكل نجد : ب (٣ ، ٠) ، ا (٠ ، ٤)

∵ $ع_{ب}$ = صفر ∴ $\overleftarrow{ق}$ تؤثر في نقطة ب (٣ ، ٠)

∵ $ع_{و}$ = ٨٤ ، $\overleftarrow{و ب}$ = (٣ ، ٠) − (٠ ، ٠) = (٣ ، ٠)

∴ (٣ ، ٠) × (ك ، ل) = ٨٤

∴ ٣ ل = ٨٤ ∴ ل = ٢٨ (١)

∵ $ع_{ا}$ = −١٠٠ ، $\overleftarrow{ا ب}$ = (٣ ، ٠) − (٠ ، ٤) = (٣ ، −٤)

∴ (٣ ، −٤) × (ك ، ل) = −١٠٠

∴ ٣ ل + ٤ ك = −١٠٠

، بالتعويض من (١) ينتج :

٨٤ + ٤ ك = −١٠٠

∴ ٤ ك = −١٨٤ ∴ ك = −٤٦

∴ $\overleftarrow{ق}$ = (−٤٦ ، ٢٨)

حل آخر

نفرض أن : $\overleftarrow{ق}$ = (ق حتا θ ، ق حا θ)

حيث : θ قياس الزاوية الموجبة التي يصنعها خط عملها مع الاتجاه الموجب لمحور السينات

∵ $ع_{ب}$ = صفر ∴ خط عملها يمر بنقطة ب

∵ $ع_{و}$ = ٨٤ ، $ج_{ا}$ = −١٠٠

∴ خط عملها يمر بنقطة يقطع $\overleftarrow{و ا}$

، و تكون كل ق حا θ ، ق حتا θ كما بالشكل المقابل

∵ $ع_{و}$ = ٨٤

∴ ق حتا θ × ٠ + ق حا θ × ٣ = ٨٤

∴ ٣ ق حا θ = ٨٤ ∴ ق حا θ = ٢٨

∵ $ع_{ا}$ = −١٠٠

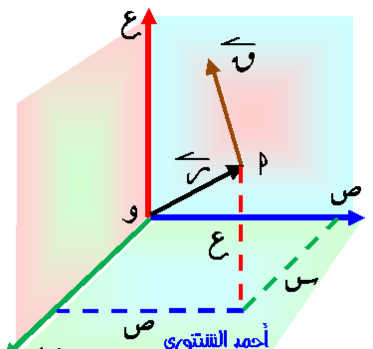
∴ ق حتا θ × ٤ + ق حا θ × ٣ = −١٠٠

∴ ق حتا θ × ٤ + ٨٤ = −١٠٠

∴ ق حتا θ × ٤ = −١٨٤ ∴ ق حتا θ = −٤٦

∴ $\overleftarrow{ق}$ = (−٤٦ ، ٢٨)

١ – ٢ عزم قوة بالنسبة لنقطة فى نظام احداثى ثلاثى الأبعاد



عزم قوة حول نقطة فى الفراغ :

إذا كانت $\overleftarrow{ق} = (ق_{س} ، ق_{ص} ، ق_{ع})$
تؤثر فى النقطة أ (س ، ص ، ع)
التى متجه موضعها بالنسبة للنقطة
و (٠ ، ٠ ، ٠) هو :
$\overleftarrow{ر} = (س ، ص ، ع)$ فإن عزم $\overleftarrow{ق}$
حول نقطة (و) : $\overleftarrow{ج}_{و} = \overleftarrow{ر} \times \overleftarrow{ق}$

$$= \begin{vmatrix} \overleftarrow{س} & \overleftarrow{ص} & \overleftarrow{ع} \\ س & ص & ع \\ ق_{س} & ق_{ص} & ق_{ع} \end{vmatrix}$$

إجابة حاول أن تحل (أ) صفحة ٣٤

أوجد عزم القوة $\overleftarrow{ق} = -٢\,\overleftarrow{س} + ٣\,\overleftarrow{ص} + ٥\,\overleftarrow{ع}$ و تؤثر فى نقطة أ متجه موضعها حول نقطة الأصل هو $\overleftarrow{ر} = \overleftarrow{س} - \overleftarrow{ص} + \overleftarrow{ع}$
ثم أوجد طول العمود المرسوم من نقطة الأصل على خط عمل $\overleftarrow{ق}$

الحل

$$\overleftarrow{ج}_{و} = (١ ، -١ ، ١) \times (-٢ ، ٣ ، ٥)$$

$$= \begin{vmatrix} \overleftarrow{س} & \overleftarrow{ص} & \overleftarrow{ع} \\ ١ & -١ & ١ \\ -٢ & ٣ & ٥ \end{vmatrix} = -٨\,\overleftarrow{س} - ٧\,\overleftarrow{ص} - ٥\,\overleftarrow{ع}$$

طول العمود المرسوم من نقطة الأصل على خط عمل القوة $= \dfrac{\|\overleftarrow{ج}_{و}\|}{\|\overleftarrow{ق}\|}$

$$= \frac{\sqrt{٦٤ + ٤٩ + ٢٥}}{\sqrt{٤ + ٩ + ٢٥}} = \frac{\sqrt{١٣٨}}{\sqrt{٣٨}} \times \frac{\sqrt{٣٨}}{\sqrt{٣٨}} = \frac{١}{١٩}\sqrt{١٣١١} = ١,٩١$$

المركبات الاحداثية لعزم قوة بالنسبة لنقطة :

إذا كانت :
$\overleftarrow{ق} = ق_{س}\,\overleftarrow{س} + ق_{ص}\,\overleftarrow{ص} + ق_{ع}\,\overleftarrow{ع}$
تؤثر فى النقطة أ متجه موضعها حول نقطة الأصل $\overleftarrow{ر} = (س ، ص ، ع)$
فإن عزم $\overleftarrow{ق}$ حول نقطة الأصل (و)

يساوى $\overleftarrow{ر} \times \overleftarrow{ق} = \begin{vmatrix} \overleftarrow{س} & \overleftarrow{ص} & \overleftarrow{ع} \\ س & ص & ع \\ ق_{س} & ق_{ص} & ق_{ع} \end{vmatrix}$

$$= (ص\,ق_{ع} - ع\,ق_{ص})\,\overleftarrow{س} + (ع\,ق_{س} - س\,ق_{ع})\,\overleftarrow{ص} + (س\,ق_{ص} - ص\,ق_{س})\,\overleftarrow{ع}$$

أى أن : عزم القوة $\overleftarrow{ق}$ له ٣ مركبات هى : $ج_{س}$ ، $ج_{ص}$ ، $ج_{ع}$
مركبات عزم القوة بالنسبة لنقطة الأصل و هى نفسها مركبات عزم القوة حول المحاور س ، ص ، ع على الترتيب و بالتالى يكون :

$ج_{س} = ص\,ق_{ع} - ع\,ق_{ص}$ مركبة العزم فى اتجاه محور س

لأن : المركبة $ق_{س}$ ليس لها عزم دورانى حول محور س لأنها توازى محور س ، المركبة $ق_{ص}$ تعمل على الدوران حول محور س فى اتجاه دوران عقارب الساعة فيكون عزمها $- ع \times ق_{ص}$
المركبة $ق_{ع}$ تعمل على الدوران حول محور س فى اتجاه عكس دوران عقارب الساعة فيكون عزمها $ص \times ق_{ع}$

بالمثل لباقى المركبات :

$ج_{ص} = ع\, ق_{س} - س\, ق_{ع}$ مركبة العزم فى اتجاه محور ص

$ج_{ع} = س\, ق_{ص} - ص\, ق_{س}$ مركبة العزم فى اتجاه محور ع

ملاحظات :

(١) ينعدم عزم قوة حول محور إذا كانت :

١) إذا أشترك خط عمل القوة مع المحور فى نقطة على الأقل

٢) إذا كانت القوة توازى المحور

(٢) مجموع عزوم القوى حول نقطة فى الفراغ يساوى عزم محصلة هذه القوى بالنسبة للنقطة نفسها

إجابة حاول أن تحل (١) صفحة ٣٤

إذا كانت القوة $\overrightarrow{ق} = ل\,\overrightarrow{س} + م\,\overrightarrow{ص} - ٢\,\overrightarrow{ع}$ تؤثر فى نقطة أ متجه موضعها حول نقطة الأصل هو $\overrightarrow{ر} = (٣ ، ١ ، ١)$ فإذا كانت مركبتا عزم $\overrightarrow{ق}$ حول المحورى س ، ص هما −١ ، −٨ على الترتيب أوجد قيمة كل من ل ، م

الحل

∵ $ق_{س} = ل$ ، $ق_{ص} = م$ ، $ق_{ع} = -٢$ ، س = ٣ ، ص = ١ ، ع = ١

، ∵ مركبة عزم القوة حول س = $ص\, ق_{ع} - ع\, ق_{ص}$

∴ −١ = ١ × (−٢) − ١ × م

∴ −١ + ٢ = −م　　∴ م = −١

، ∵ مركبة عزم القوة حول ص = $ع\, ق_{س} - س\, ق_{ع}$

∴ −٨ = ١ × ل − ٣ × (−٢)

∴ −٨ = ل + ٦　　∴ ل = −١٤

حل تمارين (٢ − ٢) صفحة ٣٦ بالكتاب المدرسى

(١) إذا كانت $\overrightarrow{س}$ ، $\overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ع}$ مجموعة يمينية من متجهات الوحدة و كانت $\overrightarrow{ق} = ٢\,\overrightarrow{س} + ٣\,\overrightarrow{ص} - \overrightarrow{ع}$ تؤثر فى النقطة أ (١ ، −١ ، ٤) أوجد :

(أ) عزم القوة $\overrightarrow{ق}$ حول نقطة الأصل و (٠ ، ٠ ، ٠)

(ب) عزم القوة $\overrightarrow{ق}$ حول نقطة ب (٢ ، −٣ ، ١) ثم استنتج طول العمود المرسوم من ب على خط عمل القوة

الحل

(أ) ∵ $\overrightarrow{ر} = \overrightarrow{و أ}$ = (١ ، −١ ، ٤) − (٠ ، ٠ ، ٠) = (١ ، −١ ، ٤)

$$∴ \overrightarrow{ج}_{و} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{س} & \overrightarrow{ص} & \overrightarrow{ع} \\ ١ & -١ & ٤ \\ ٢ & ٣ & -١ \end{vmatrix} = -١١\,\overrightarrow{س} + ٩\,\overrightarrow{ص} + ٥\,\overrightarrow{ع}$$

(ب) ∵ $\overrightarrow{ر} = \overrightarrow{ب أ}$ = (١ ، −١ ، ٤) − (٢ ، −٣ ، ١) = (−١ ، ٢ ، ٣)

$$∴ \overrightarrow{ج}_{و} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{س} & \overrightarrow{ص} & \overrightarrow{ع} \\ ٢ & -٣ & ١ \\ -١ & ٢ & ٣ \end{vmatrix} = -١١\,\overrightarrow{س} + ٥\,\overrightarrow{ص} - ٧\,\overrightarrow{ع}$$

طول العمود المرسوم من ب على خط عمل القوة = $\dfrac{\|\overrightarrow{ج}_{و}\|}{\|\overrightarrow{ق}\|}$

$$= \frac{\sqrt{١٢١ + ٢٥ + ٤٩}}{\sqrt{٤ + ٩ + ١}} = \frac{\sqrt{١٩٥}}{\sqrt{١٤}} = ٣,٧٣$$

(٢) إذا كانت $\overrightarrow{ق} = ٢\,\overrightarrow{س} + ل\,\overrightarrow{ص} - \overrightarrow{ع}$ تؤثر فى النقطة أ (٤ ، −٢ ، ٠) و كان عزم $\overrightarrow{ق}$ حول نقطة الأصل يساوى $٢\,\overrightarrow{س} + ٤\,\overrightarrow{ص} + ١٦\,\overrightarrow{ع}$ فما قيمة ل ؟

الحل

∵ ر = و أ = (٤ ، –٢ ، ٠) – (٠ ، ٠ ، ٠) = (٤ ، –٢ ، ٠)

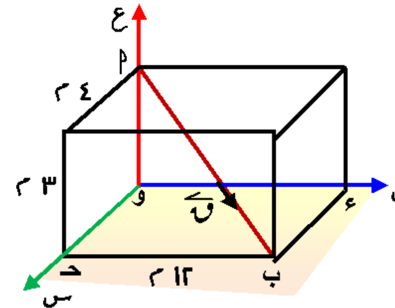
∴ جو = | س ص ع ؛ ٤ –٢ ٠ ؛ ٢ ل –١ | = ٢ س + ٤ ص + (٤ ل + ٤) ع

، ∵ جو = ٢ س + ٤ ص + ١٦ ع

∴ ٤ ل + ٤ = ١٦ ∴ ٤ ل = ١٢ ∴ ل = ٣

(٣) في الشكل المقابل :

قوة مقدارها ١٣٠ نيوتن تؤثر في القطر أ ب في متوازي مستطيلات أبعاده ٣ م ، ٤ م ، ١٢ م أوجد عزم القوة ق حول النقطة ء



الحل

من الشكل نجد : أ (٠ ، ٠ ، ٣) ، ب (٤ ، ١٢ ، ٠) ، ء (٠ ، ١٢ ، ٠)

∴ أ ب = ب – أ = (٤ ، ١٢ ، ٠) – (٠ ، ٠ ، ٣) = (٤ ، ١٢ ، –٣)

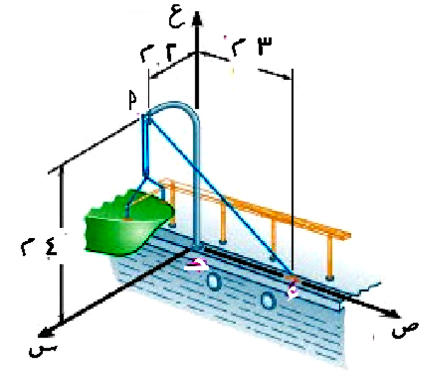
، ق = ق (أ ب / || أ ب ||) = ١٣٠ ((٤ ، ١٢ ، –٣) / $\sqrt{16 + 144 + 9}$) = (٤٠ ، ١٢٠ ، –٣٠)

، ر = ء أ = أ – ء = (٠ ، ٠ ، ٣) – (٠ ، ١٢ ، ٠) = (٠ ، –١٢ ، ٣)

∴ جء = ر × ق = | س ص ع ؛ ٠ –١٢ ٣ ؛ ٤٠ ١٢٠ –٣٠ | = ١٢٠ ص + ٤٨٠ ع

(٤) في الشكل المقابل :

حبل مثبت في النقطة ء يمر على بكرة ملساء عند أ و يتدلى من الطرف الآخر للخيط زورق صغير فإذا كان مقدار الشد في الحبل أ ء يساوي ١٠ $\sqrt{29}$ نيوتن أوجد عزم الشد في الحبل حول النقطة حـ



الحل

من الشكل نجد : أ (٢ ، ٠ ، ٤) ، حـ (٠ ، ٠ ، ٠) ، ء (٠ ، ٣ ، ٠)

ر = حـ أ = أ – حـ = (٢ ، ٠ ، ٤) – (٠ ، ٠ ، ٠) = (٢ ، ٠ ، ٤)

، أ ء = ء – أ = (٠ ، ٣ ، ٠) – (٢ ، ٠ ، ٤) = (–٢ ، ٣ ، –٤)

، ش = ش (أ ء / || أ ء ||) = ١٠ $\sqrt{29}$ ((–٢ ، ٣ ، –٤) / $\sqrt{4 + 9 + 16}$) = (–٢٠ ، ٣٠ ، –٤٠)

∴ جحـ = ر × ش = | س ص ع ؛ ٢ ٠ ٤ ؛ –٢٠ ٣٠ –٤٠ | = –١٢٠ س + ٦٠ ع

(٥) قوة ق تؤثر في النقطة (٢ ، –١ ، ٣) فإذا كان عزم ق بالنسبة لنقطة الأصل يساوي ٢١ ص + ٧ ع أوجد ق حيث ق توازي محور السينات

الحل

نفرض أن : ق = (ك ، ل ، م) ، أ (٢ ، –١ ، ٣)

، ∵ جو = ٢١ ص + ٧ ع (١)

، جو = | س ص ع ؛ ٢ –١ ٣ ؛ ك ل م |

= (– م – ٣ ل) س + (٣ ك – ٢ م) ص + (٢ ل + ك) ع   (٢)

من (١) ، (٢) ينتج : – م – ٣ ل = ٠   ∴ م = – ٣ ل   (٣)

، ٣ ك – ٢ م = ٢١   (٤)   ،   ٢ ل + ك = ٧   (٥)

بالتعويض عن قيمة م من (٣) فى (٤) ينتج :

٣ ك + ٦ ل = ٢١   بالقسمة ÷ ٣ ينتج :

ك + ٢ ل = ٧   و هى نفس المعادلة (٥)

∵ المعادلات لها عدد لا نهائى من الحلول

نفرض أن : ل = ن   حيث : ن ∈ ح

∴ من (٣) ينتج : م = – ٣ ن ، من (٥) ينتج : ك = ٧ – ٢ ن

∴ ق = (٧ – ٢ ن ، ن ، – ٣ ن) لكل ن ∈ ح

عندما : ن = ٠ (مثلاً) فإن : ق = (٧ ، ٠ ، ٠) = ٧ س

(٦) إذا كانت القوة ق = ٢ س + ب ص + ع تؤثر فى النقطة أ (–١ ، ٣ ، –٢) و كانت مركبة عزم ق حول محور س يساوى –٣ أوجد قيمة ب ثم أوجد طول العمود المرسوم من نقطة الأصل على خط عمل القوة

الحل

∵ $ق_{س}$ = ٢ ، $ق_{ص}$ = ب ، $ق_{ع}$ = ١ ، س = –١ ، ص = ٣ ، ع = –٢

، ∵ مركبة عزم القوة حول س = ص $ق_{ع}$ – ع $ق_{ص}$

∴ –٣ = ٣ × ١ – (–٢) × ب

∴ –٣ = ٣ + ٢ ب   ∴ –٦ = ٢ ب   ∴ ب = –٣

، ∵ و أ = (–١ ، ٣ ، –٢) – (٠ ، ٠ ، ٠) = (–١ ، ٣ ، –٢)

∴ $ج_{و}$ = و أ × ق = | س ص ع ؛ –١ ٣ –٢ ؛ ٢ –٣ ١ | = –٣ س – ٣ ص – ٣ ع

، طول العمود المرسوم من نقطة الأصل على خط عمل القوة = ||$ج_{و}$|| ÷ ||ق||

= √(٩ + ٩ + ٩) ÷ √(٤ + ٩ + ١) = √٢٧ ÷ √١٤ = ١,٣٩

(٧) أ ب حـ ء شبه منحرف قائم الزاوية فى ب ، أ ء // ب حـ ، أ ب = ٨ سم ، ب حـ = ١٥ ، أ ء = ٩ سم ، رسم ء هـ ⊥ مستوى شبه المنحرف حيث ء هـ = ١٢ سم ، أثرت قوة مقدارها ٧٥ نيوتن فى أ هـ ، أوجد عزم القوة حول النقطة ب

الحل

من هندسة الشكل نجد : ء (٠ ، ٠ ، ٠) ، أ (٠ ، ٩ ، ٠) ، ب (٨ ، ٩ ، ٠) ، هـ (٠ ، ٠ ، ١٢)

∴ أ هـ = (٠ ، ٠ ، ١٢) – (٠ ، ٩ ، ٠) = (٠ ، –٩ ، ١٢)

، ب أ = (٠ ، ٩ ، ٠) – (٨ ، ٩ ، ٠) = (–٨ ، ٠ ، ٠)

، ق = ق (أ هـ ÷ ||أ هـ||) = ٧٥ ((٠ ، –٩ ، ١٢) ÷ √(٠ + ٨١ + ١٤٤)) = (٠ ، –٤٥ ، ٦٠)

∴ $ج_{ب}$ = ب أ × ق = | س ص ع ؛ –٨ ٠ ٠ ؛ ٠ –٤٥ ٦٠ | = ٤٨٠ ص + ٣٦٠ ع

(٨) إذا كان عزم القوة ق = ٢ س + ٣ ص – ع حول نقطة الأصل (و) يساوى $ج_{و}$ = –٥ س + ٣ ص – ع و إذا كانت هذه القوة تمر بنقطة الاحداثى ص يساوى ٢ ، أوجد الاحداثيى س

ع ، للنقطة و كذلك أوجد طول العمود المرسوم من نقطة الأصل على خط عمل القوة

الحل

نفرض أن نقطة تأثير القوة هى (س ، ٢ ، ع)

∴ ر⃗ = (س ، ٢ ، ع) − (٠ ، ٠ ، ٠) = (س ، ٢ ، ع)

∴ ج⃗و = ر⃗ × ق⃗ = | س⃗ ص⃗ ع⃗ ؛ س ٢ ع ؛ ٢ ٣ −١ |

= (−٢ − ٣ع) س⃗ + (س + ٢ع) ص⃗ + (٣س − ٤) ع⃗

، ∵ ج⃗و = −٥ س⃗ + ٣ ص⃗ − ع⃗

∴ −٢ − ٣ع = −٥ ∴ ٣ع = ٣ ∴ ع = ١

، ٣س − ٤ = −١ ∴ ٣س = ٣ ∴ س = ١

، طول العمود المرسوم من نقطة الأصل على خط عمل القوة = ||ج⃗و|| / ||ق⃗||

= √(٢٥ + ٩ + ١) / √(٤ + ٩ + ١) = √٣٥ / √١٤ = ١,٥٨

(٩) قوة ق⃗ = ١٥ س⃗ − ٢٥ ص⃗ + ٤٠ ع⃗ تؤثر فى نقطة أ (−٣ ، −٣ ، ٢) أوجد مركبة ق⃗ حول محور ص

الحل

∵ ق‎س = ١٥ ، ق‎ص = −٢٥ ، ق‎ع = ٤٠

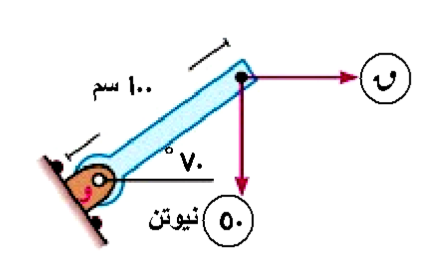
، س = −٣ ، ص = −٣ ، ع = ٢

∴ مركبة عزم القوة حول ص = ع ق‎س − س ق‎ع

= ٢ × ١٥ − (−٣) × ٤٠ = ١٥٠

حل تمارين عامة صفحة ٣٩ بالكتاب المدرسى

(١) إذا كان عزم القوة الأفقية ق حول نقطة (و) يساوى عزم القوة الرأسية ٥٠ نيوتن حول نقطة (و) فما قيمة ق



الحل

∵ عزم ق حول (و) = ق × ١٠٠ × حا ٧٠°

، عزم القوة الرأسية حول (و) = ٥٠ × ١٠٠ × حتا ٧٠°

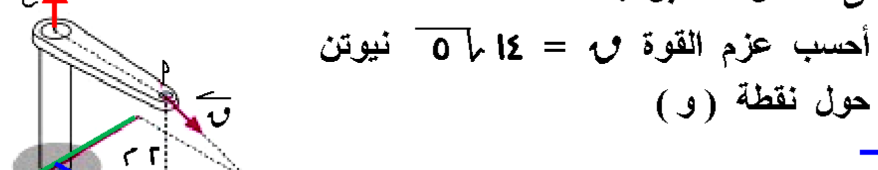
، ∵ عزم ق حول (و) = عزم القوة الرأسية حول (و)

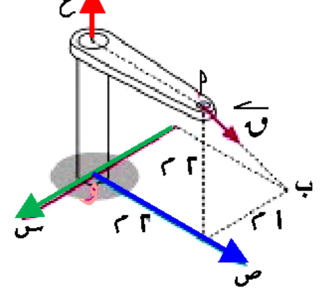
∴ ق × ١٠٠ × حا ٧٠° = ٥٠ × ١٠٠ × حتا ٧٠° بالقسمة ÷ ١٠٠ × حا ٧٠° ينتج :

ق = ٥٠ × ظتا ٧٠° = ١٨,١٩٩ نيوتن

(٢) فى الشكل المقابل :

أحسب عزم القوة ق = ١٤√٥ نيوتن حول نقطة (و)





الحل

من هندسة الشكل : أ (٠ ، ٢ ، ٢) ، ب (−١ ، ٢ ، ٠)

∴ أب⃗ = (−١ ، ٢ ، ٠) − (٠ ، ٢ ، ٢) = (−١ ، ٠ ، −٢) ، وأ⃗ = (٠ ، ٢ ، ٢)

، ق⃗ = ق (أب⃗ / ||أب⃗||) = ١٤√٥ ((−١ ، ٠ ، −٢) / √(١ + ٠ + ٤)) = (−١٤ ، ٠ ، −٢٨)

∴ ج⃗و = وأ⃗ × ق⃗ = | س⃗ ص⃗ ع⃗ ؛ ٠ ٢ ٢ ؛ −١٤ ٠ −٢٨ |

= −٥٦ س⃗ − ٢٨ ص⃗ + ٢٨ ع⃗

(٣) قوة ق‾ = ٧ ص‾ تؤثر فى النقطة (– ٣ ، ٠) أوجد عزم القوة بالنسبة للنقطة (١ ، – ٢)

الحل

ر‾ = (– ٣ ، ٠) – (١ ، – ٢) = (– ٤ ، ٢)

∴ عزم القوة = (– ٤ ، ٢) × (٠ ، ٧) = – ٢٨ ع‾

(٤) القوة ق‾١ = ٢ س‾ + ص‾ نيوتن تؤثر فى نقطة متجه موضعها ٢ س‾ + ٢ ص‾ متر و قوة أخرى ق‾٢ = ٥ س‾ نيوتن تؤثر فى نقطة متجه موضعها – ٢ س‾ + ص‾ أوجد مجموع عزوم هذه القوى حول نقطة الأصل

الحل

ج‾و = (٢ ، ٢) × (٢ ، ١) + (– ٢ ، ١) × (٥ ، ٠)

= – ٢ ع‾ – ٥ ع‾ = – ٧ ع‾

(٥) إذا كانت س‾ ، ص‾ ، ع‾ مجموعة يمينية من متجهات الوحدة و كانت القوة ق‾ = ٣ س‾ + ل ص‾ + ٤ ع‾ تؤثر فى النقطة أ (١ ، ٠ ، – ١) ، و كان عزم القوة ق‾ بالنسبة للنقطة ب (٢ ، – ١ ، ٣) يساوى – ٤ س‾ – ٨ ص‾ – ٥ ع‾ فما قيمة ل

الحل

∵ ب أ‾ = (١ ، ٠ ، – ١) – (٢ ، – ١ ، ٣) = (– ١ ، ١ ، – ٤)

∴ ج‾ب = ب أ‾ × ق‾ =

س‾	ص‾	ع‾
– ١	١	– ٤
٣	ل	٤

= (٤ + ٤ ل) س‾ – ٨ ص‾ + (– ل – ٣) ع‾

، ∵ ج‾ب = – ٤ س‾ – ٨ ص‾ – ٥ ع‾

∴ ٤ + ٤ ل = – ٤ ∴ ٤ ل = – ٨ ∴ ل = – ٢

(٦) فى الشكل المقابل : أوجد القياس الجبرى لمجموع عزوم القوى بالنسبة للنقطة حـ

الحل

بتحليل القوتين : ٦٠٠ إلى المركبتين ٦٠٠ حتا ٣٠° ، ٦٠٠ حا ٣٠° فى اتجاهى محورى س ، ص على الترتيب ، ٣٠٠ إلى المركبتين ٣٠٠ حتا θ ، ٣٠٠ حا θ فى اتجاهى محورى س ، ص على الترتيب حيث :

حتا θ = ٤/٥ ، حا θ = ٣/٥

∴ جـحـ = ٦٠٠ حتا ٣٠° × ٢ – ٦٠٠ حا ٣٠° × ٧ – ٨٠٠ × ٢ – ٣٠٠ × ٤/٥ × ٢,٥

= – ٣٢٦٠,٧٧ نيوتن . م

(٧) فى الشكل المقابل : أثبت أن محصلة القوتين ١٠٠ نيوتن ، ٨٠ √٢ نيوتن تمر بالنقطة حـ

الحل

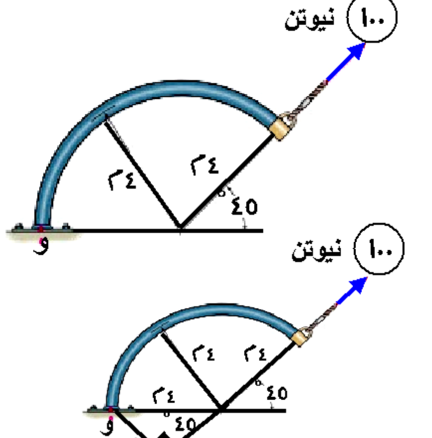
∵ جـحـ = ١٠٠ × ٢٠ – ٨٠ √٢ × ٢٥ حتا ٤٥°

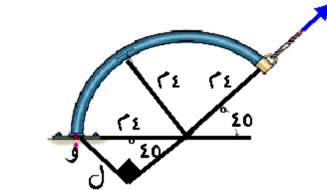
= ٢٠٠٠ – ٢٠٠٠ √٢ × ١/√٢ = صفر

∴ محصلة القوتين تمر بالنقطة حـ

(٨) فى الشكل المقابل :

أوجد القياس الجبرى لعزم القوة ١٠٠ نيوتن حول نقطة (و)





الحل

من هندسة الشكل :

$ل = ٤ \text{ حا } ٤٥° = ٤ \times \frac{١}{\sqrt{٢}} = ٢\sqrt{٢}$

$\therefore ع_و = ١٠٠ \times ٢\sqrt{٢} = ٢٠٠\sqrt{٢}$ نيوتن . م

(٩) فى الشكل المقابل :

أوجد عزم القوة : $\overrightarrow{ق} = ١٥\sqrt{١١}$ نيوتن حول نقطة (و)

الحل

من هندسة الشكل : أ (٠ ، ٠ ، ١٥) ، ب (−٥ ، ٥ ، ٠)

$\therefore \overrightarrow{أب} = (−٥ ، ٥ ، ٠) − (٠ ، ٠ ، ١٥)$

$= (−٥ ، ٥ ، −١٥)$ ، $\overrightarrow{و أ} = (٠ ، ٠ ، ١٥)$

، $\overrightarrow{ق} = ق \left(\frac{\overrightarrow{أب}}{\|\overrightarrow{أب}\|} \right) = ١٥\sqrt{١١} \left(\frac{(−٥ ، ٥ ، −١٥)}{\sqrt{٢٥ + ٢٥ + ٢٢٥}} \right) = (−١٥ ، ١٥ ، −٤٥)$

$\therefore \overrightarrow{ع_و} = \overrightarrow{و أ} \times \overrightarrow{ق} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{س} & \overrightarrow{ص} & \overrightarrow{ع} \\ ٠ & ٠ & ١٥ \\ −١٥ & ١٥ & −٤٥ \end{vmatrix} = −٢٢٥\,\overrightarrow{س} − ٢٢٥\,\overrightarrow{ص}$

حل اختبار تراكمى صفحة ٣٩ بالكتاب المدرسى

أختر الاجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة

(١) إذا كان : أ ب حـ مثلث قائم الزاوية فى ب فيه : أ حـ = ١٠ سم ، ق (∠ ب حـ أ) = θ فإن : ب حـ = ...

(أ) ١٠ حا θ (ب) ١٠ حتا θ (حـ) ١٠ ظا θ (د) ٥

(٢) البعد بين النقطتين (٢ ، −١) ، (−١ ، ٣) يساوى ....

(أ) ٤ (ب) ٥ (حـ) $\sqrt{٥}$ (د) ٢

(٣) جيوب تمام المتجه (−٢ ، ٢ ، ١) هى ....

(أ) ٢ ، −٢ ، −١ (ب) $−\frac{٢}{٣}$ ، $\frac{٢}{٣}$ ، $\frac{١}{٣}$

(حـ) $\frac{٢}{٣}$ ، $\frac{٢}{٣}$ ، $\frac{١}{٣}$ (د) $\frac{−٢}{\sqrt{٥}}$ ، $\frac{٢}{\sqrt{٥}}$ ، $\frac{١}{\sqrt{٥}}$

(٤) إذا كان : أ ب حـ مثلث فيه : أ ب = ٨ سم ، ق (∠ أ ب حـ) = ٧٠° فإن : طول العمود المرسوم من أ على $\overleftrightarrow{ب حـ}$ يساوى ....

(أ) ٨ حتا ٧٠° (ب) ٨ حا ٧٠° (حـ) ٨ ظا ٧٠° (د) $\sqrt{٨}$

(٥) إذا كان : $\overrightarrow{أ} = (٢ ، −١)$ ، $\overrightarrow{ب} = (٣ ، ٢)$

فإن : $\overrightarrow{أ} \bullet \overrightarrow{ب} =$ ....

(أ) ٧ (ب) $\sqrt{٦٥}$ (حـ) ٤ (د) ٨

(٦) إذا كان : $\overrightarrow{أ} = (−١ ، ٢ ، ٣)$ ، $\overrightarrow{ب} = (٢ ، ٢ ، ١)$

فإن : $\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب} =$ ....

(أ) (٤ ، ٧ ، −٦) (ب) (−٤ ، −٧ ، −٦)

(حـ) (−٤ ، ٧ ، −٦) (د) ٥

(٧) إذا كان $\vec{ق}$ = (٢ ، –٣ ، ٤) تؤثر فى النقطة (١ ، ١ ، ١) فإن :
مركبة $\vec{ق}$ حول محور س تساوى ....

(أ) ٧　　(ب) –٢　　(جـ) –٥　　(د) ٢

الحل

(١) من الشكل المقابل :
ب جـ = ١٠ حتا θ

(٢) بفرض أن : أ (٢ ، –١) ، ب (–١ ، ٣)
∴ (أ ب)^2 = (–١ – ٢)^2 + (٣ + ١)^2 = ٢٥
∴ أ ب = ٥　∴ البعد بين النقطتين = ٥ وحدات طول

(٣) ∵ || (–٢ ، ٢ ، ١) || = ٣
∴ جيوب تمام الاتجاه للمتجه هى : $-\frac{٢}{٣}$ ، $\frac{٢}{٣}$ ، $\frac{١}{٣}$

(٤) من الشكل المقابل :
أ ء = ٨ حا ٧٠°

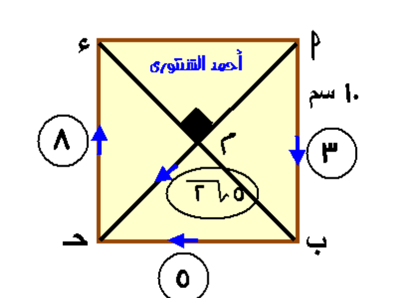
(٥) $\vec{أ} \cdot \vec{ب}$ = (٢ ، –١) • (٣ ، ٢) = ٦ – ٢ = ٤

(٦) $\vec{أ} \times \vec{ب} = \begin{vmatrix} \vec{س} & \vec{ص} & \vec{ع} \\ -١ & ٢ & ٣ \\ ٢ & ٢ & ١ \end{vmatrix}$ = (–٤ ، ٧ ، –٦)

(٧) ∵ $ق_س$ = ٢ ، $ق_ص$ = –٣ ، $ق_ع$ = ٤ ، س = ١ ، ص = ١ ، ع = ١
∴ مركبة عزم القوة حول س = ص $ق_ع$ – ع $ق_ص$
= ١ × ٤ – ١ × (–٣) = ٧

أجب عن الأسئلة الآتية

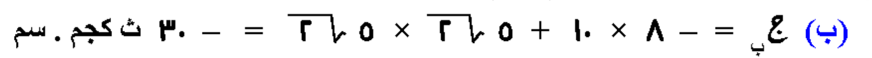
(٨) أ ب جـ ء مربع طول ضلعه ١٠ سم ، أثرت قوى مقاديرها ٣ ، ٥ ، ٨ ، ٥ $\sqrt{٢}$ ث كجم في الاتجاهات $\overrightarrow{أب}$ ، $\overrightarrow{ب جـ}$ ، $\overrightarrow{جـ ء}$ ، $\overrightarrow{أ جـ}$
أوجد القياس الجبرى لمجموع عزوم القوى :
(أ) بالنسبة للنقطة أ　　(ب) بالنسبة للنقطة ب
(جـ) بالنسبة لمركز المربع



الحل

من هندسة الشكل : ب ء = ١٠ $\sqrt{٢}$ سم
، م ب = ٥ $\sqrt{٢}$ سم

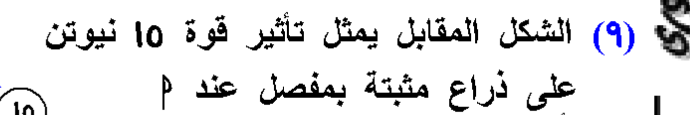
(أ) $ع_أ$ = – ٥ × ١٠ – ٨ × ١٠
= – ١٣٠ ث كجم . سم



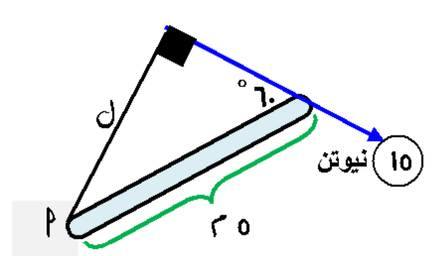
(ب) $ع_ب$ = – ٨ × ١٠ + ٥ $\sqrt{٢}$ × ٥ $\sqrt{٢}$ = – ٣٠ ث كجم . سم

(جـ) $ع_م$ = – ٣ × ٥ – ٥ × ٥ – ٨ × ٥ = – ٨٠ ث كجم . سم

(٩) الشكل المقابل يمثل تأثير قوة ١٥ نيوتن على ذراع مثبتة بمفصل عند أ
أوجد القياس الجبرى لعزم القوة بالنسبة لنقطة أ



الحل

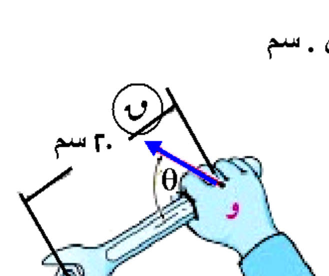


من هندسة الشكل :
ل = ٥ حا ٦٠°
∴ $ع_أ$ = – ١٥ × ٥ حا ٦٠°
= – ١٥ × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$
= – $\frac{٧٥}{٢}$ $\sqrt{٣}$ نيوتن . م

(٩) فى الشكل المقابل :

الشد فى الخيط $\overline{أب}$ مقداره ١٥٠ نيوتن

أوجد القياس الجبرى لعزم القوة بالنسبة للنقطة و



الحل

من △ أ ب و : ق (∠ ب و أ) = ٦٠°

∴ (أ ب)^2 = (٤٥)^2 + (٦٠)^2 − ٢ × ٤٥ × ٦٠ × حتا ٦٠°

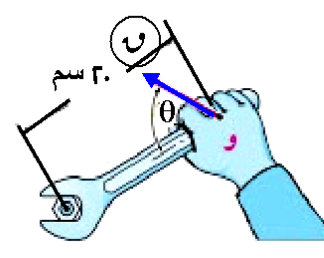
∴ أ ب = ١٥ $\sqrt{١٣}$ سم

، حتا ب = $\frac{(٦٠)^2 + (١٥\sqrt{١٣})^2 - (٤٥)^2}{٢ \times ٦٠ \times ١٥\sqrt{١٣}}$ ∴ ق (∠ ب) = ٦ ′٤٦°

∴ $ع_و$ = ش × ٦٠ حا ٦ ′٤٦° = ٦٤٨٥,١٩ نيوتن . سم

(١١) إذا كان العزم اللازم لدوران المسمار حول (و) يساوى ٤٠٠ نيوتن . سم

أوجد أقل قيمة للقوة ق و قيمة θ التى تحقق دوران المسمار بالنسبة لنقطة أ



الحل

∵ $ع_و$ = ق × ٢٠ حا θ ∴ ٤٠٠ = ق × ٢٠ حا θ

∴ ٢٠ = ق حا θ ∴ ق = $\frac{٢٠}{حا θ}$

و تكون أقل قيمة للقوة ق عندما يكون : المقام " حا θ " أكبر ما يمكن

أى عندما يكون : حا θ = ١ ∴ θ = ٩٠°

∴ ق = ٢٠ نيوتن و هى أقل قيمة تحقق دوران المسمار

اجابة أسئلة الاختبارات الخاصة بالوحدة

الاختبار الأول

السؤال الأول : أختر الاجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة

(٣) إذا كانت القوة $\overleftarrow{ق}$ = ٣ $\overleftarrow{س}$ − ٥ $\overleftarrow{ص}$ تؤثر فى النقطة (−١ ، ١) فإن : عزم القوة $\overleftarrow{ق}$ بالنسبة لنقطة الأصل يساوى ....

(أ) −٢ $\overleftarrow{ع}$ (ب) ٢ $\overleftarrow{ع}$ (جـ) ٨ $\overleftarrow{ع}$ (د) −٨ $\overleftarrow{ع}$

الحل

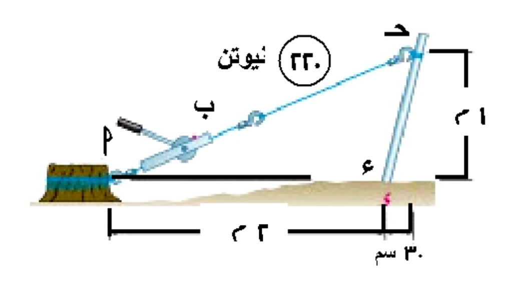
$\overleftarrow{ع_و}$ = $\overleftarrow{ر}$ × $\overleftarrow{ق}$ = (−١ ، ١) × (٣ ، −٥) = ٢ $\overleftarrow{ع}$

السؤال الثانى :

(١) الشكل المقابل :

يوضح شداد أ ب يؤثر على عمود مائل جـ ء

أوجد معيار عزم قوة الشد بالنسبة للنقطة ء



الحل

نرسم ء هـ ⊥ $\overline{أجـ}$ ، $\overline{جـ ى}$ ⊥ $\overleftarrow{أء}$

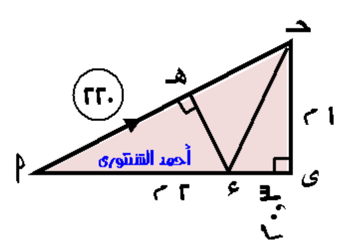
∴ من △ أ جـ ى القائم الزاوية فى ى

∴ (أ جـ)^2 = (جـ ى)^2 + (أ ى)^2

= (١)^2 + (٢,٣)^2 = ٦,٢٩

∴ أ جـ = ٢,٥٠٧٩٨ م ، حا أ = ٠,٣٩٨٧

∴ من △ أ ء هـ القائم الزاوية فى هـ :



$\text{ء هـ} = \text{أ ء} \times \text{أ حا} = ٢ \times ٠,٣٩٨٧ = ٠,٧٩٧٤$

$\therefore \text{ع}_{\text{ء}} = ٢٢٠ \times ٠,٧٩٧٤ = ١٧٥,٤$ نيوتن . م

السؤال الخامس :

(أ) فى الشكل المقابل :

قوة $٢٥\sqrt{٦}$ نيوتن تؤثر فى $\overleftarrow{\text{هـ م}}$ اوجد مركبات عزم القوة بالنسبة لمحاور الاحداثيات

الحل

من هندسة الشكل نجد أن :

هـ (٠ ، ٠ ، ١٠) ، م (٥ ، ١٠ ، ٥)

$\therefore \overleftarrow{\text{هـ م}} = \overleftarrow{\text{م}} - \overleftarrow{\text{هـ}} = (٥ ، ١٠ ، -٥)$ $\therefore \|\overleftarrow{\text{هـ م}}\| = ٥\sqrt{٦}$

، $\overleftarrow{\text{ق}} = \text{ق} \left(\frac{\overleftarrow{\text{هـ م}}}{\|\overleftarrow{\text{هـ م}}\|} \right) = ٢٥\sqrt{٦} \left(\frac{(٥ ، ١٠ ، -٥)}{٥\sqrt{٦}} \right)$

$= (٢٥ ، ٥٠ ، -٢٥)$

، $\because \overleftarrow{\text{و هـ}} = (٠ ، ٠ ، ١٠)$

$\therefore \overleftarrow{\text{ج}} = \overleftarrow{\text{و هـ}} \times \overleftarrow{\text{ق}} = (٠ ، ٠ ، ١٠) \times (٢٥ ، ٥٠ ، -٢٥)$

$$= \begin{vmatrix} \overleftarrow{\text{س}} & \overleftarrow{\text{ص}} & \overleftarrow{\text{ع}} \\ ٠ & ٠ & ١٠ \\ ٢٥ & ٥٠ & -٢٥ \end{vmatrix} = -٥٠٠ \overleftarrow{\text{س}} + ٢٥٠ \overleftarrow{\text{ص}}$$

$\therefore$ مركبة عزم $\overleftarrow{\text{ق}}$ بالنسبة لمحور س = −٥٠٠

، مركبة عزم $\overleftarrow{\text{ق}}$ بالنسبة لمحور ص = ٢٥٠

، مركبة عزم $\overleftarrow{\text{ق}}$ بالنسبة لمحور ع = صفر

الاختبار الثانى

السؤال الأول : أختر الاجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة

(٣) الشكل المقابل يوضح :

تأثير قوة مقدارها ق على طرف قضيب قياس الزاوية θ التى تولد أكبر عزم حول النقطة ب هو ....



(أ) ٠° (ب) ٩٠° (جـ) ٤٥° (د) ٣٠°

الحل

نفرض أن : طول القضيب = ل وحدة طول

$\therefore$ طول العمود الساقط من ب على خط عمل القوة = ل حا θ

$\therefore \text{ج}_{\text{ب}} = \text{ق ل حا } \theta$

و يكون : $\text{ج}_{\text{ب}}$ أكبر ما يمكن عندما : حا θ = ١ أى عندما : θ = ٩٠°

السؤال الثانى :

(أ) إذا كانت القوة $\overleftarrow{\text{ق}} = ٥ \overleftarrow{\text{س}} - \overleftarrow{\text{ص}} + ٣ \overleftarrow{\text{ع}}$ تؤثر فى النقطة (−١ ، ٢ ، ١) أوجد :

أولاً : عزم القوة بالنسبة لنقطة الأصل

ثانياً : طول العمود المرسوم من نقطة الأصل على خط عمل $\overleftarrow{\text{ق}}$

الحل

$\overleftarrow{\text{و أ}} = (-١ ، ٢ ، ١)$ ، $= (٥ ، -١ ، ٣)$

$$\overleftarrow{\text{ج}} = \begin{vmatrix} \overleftarrow{\text{س}} & \overleftarrow{\text{ص}} & \overleftarrow{\text{ع}} \\ -١ & ٢ & ١ \\ ٥ & -١ & ٣ \end{vmatrix} = ٧ \overleftarrow{\text{س}} + ٨ \overleftarrow{\text{ص}} - ٩ \overleftarrow{\text{ع}}$$

أحمد الشتنوى

$(\|\overrightarrow{ج}\|)^2$ = ٤٩ + ٦٤ + ٨١ = ١٩٤   ∴ $\|\overrightarrow{ج}\|$ = $\sqrt{١٩٤}$

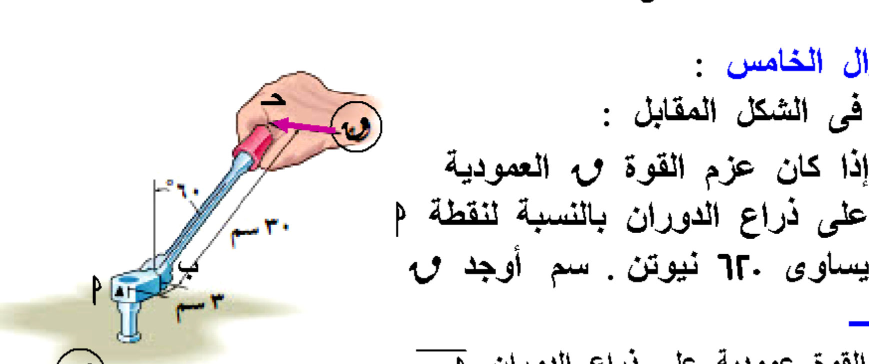
، $(\|\overrightarrow{ق}\|)^2$ = ٢٥ + ١ + ٩ = ٣٥   ∴ $\|\overrightarrow{ق}\|$ = $\sqrt{٣٥}$

طول العمود = $\frac{\|\overrightarrow{ج}\|}{\|\overrightarrow{ق}\|}$ = $\frac{\sqrt{١٩٤}}{\sqrt{٣٥}}$

السؤال الخامس :

(ا) فى الشكل المقابل :

إذا كان عزم القوة ق العمودية على ذراع الدوران بالنسبة لنقطة ا يساوى ٦٢٠ نيوتن . سم أوجد ق



الحل

∵ القوة عمودية على ذراع الدوران $\overline{ا حـ}$

∴ من هندسة الشكل :

ق(∠ا ب ء) = ٣٠°

∴ من △ ب ء حـ :

حـ ء = ٣٠ حا ٣٠° = ١٥ سم

، ب ء = ٣٠ حتا ٣٠° = ٢٥,٩٨ سم

، ا ء = ا ب + ب ء

= ٣ + ٢٥,٩٨ = ٢٨,٩٨ سم

∴ من △ ا ء حـ :

$(ا حـ)^2 = (ا ء)^2 + (ء حـ)^2 = (٢٨,٩٨)^2 + (١٥)^2$

∴ ا حـ = ٣٢,٦ سم

، ∵ $ع_ا$ = ق × ا حـ

∴ ٦٢٠ = ق × ٣٢,٦

و منها ينتج : ق = ١٩,٠٢ نيوتن

حل آخر

من هندسة الشكل :

ق(∠ا ب حـ) = ١٥٠°

∴ من △ ا ء حـ :

$(ا حـ)^2 = (ا ب)^2 + (ب حـ)^2$ − ٢ (ا ب) (ب حـ) × حتا (∠ا ب حـ)

= $(٣)^2 + (٣٠)^2$ − ٢ × ٣ × ٣٠ × حتا ١٥٠°

∴ ا حـ = ٣٢,٦ سم

، ∵ $ع_ا$ = ق × ا حـ

∴ ٦٢٠ = ق × ٣٢,٦

و منها ينتج : ق = ١٩,٠٢ نيوتن



حل ثالث

من هندسة الشكل :

ق(∠هـ ب حـ) = ٦٠° ، ق(∠ء ب حـ) = ٣٠°

حـ ء = ٣٠ حا ٣٠° = ١٥ سم

، ب ء = ٣٠ حتا ٣٠° = ٢٥,٩٨ سم

∴ ا ء = ا ب + ب ء

= ٣ + ٢٥,٩٨ = ٢٨,٩٨ سم

، احداثيات النقط هى :

ا = (٠ ، ٠ ، ٠) " نقطة الأصل "

حـ = (− ٢٨,٩٨ ، ٠ ، ١٥) " نقطة تأثير القوة "

∴ $\overrightarrow{ر}$ = $\overrightarrow{ا حـ}$ = $\overrightarrow{حـ}$ − $\overrightarrow{ا}$

= (− ٢٨,٩٨ ، ٠ ، ١٥)

− (٠ ، ٠ ، ٠) = (− ٢٨,٩٨ ، ٠ ، ١٥)

، ∵ خط عمل القوة // محور ص ، و فى اتجاهه السالب

∴ $\overrightarrow{ق} = (٠ ، – ق ، ٠)$ و يكون :

$$\overrightarrow{ج}_م = \begin{vmatrix} \overrightarrow{س} & \overrightarrow{ص} & \overrightarrow{ع} \\ -٢٨,٩٨ & ٠ & ١٥ \\ ٠ & -ق & ٠ \end{vmatrix} = ١٥ ق \overrightarrow{س} + ٢٨,٩٨ ق \overrightarrow{ع}$$

∴ $(\| \overrightarrow{ج}_م \|)^٢ = (١٥ ق)^٢ + (٢٨,٩٨ ق)^٢ = ١٠٦٤,٨٤ ق^٢$

∴ $ج_م = ٣٢,٦ ق$ ، ∵ $ج_م = ٦٢٠$

∴ $٦٢٠ = ق × ٣٢,٦$ ∴ $ق = ١٩,٠٢$ نيوتن

حل رابع

بتحليل القوة ق في اتجاهين متعامدين نجد :

من هندسة الشكل :

ق(∠١) = ق(∠٣) بالتقابل بالرأس

ق(∠١) = ق(∠٢) متممتان لنفس الزاوية

∴ ق(∠٢) = ق(∠٣)

∴ القوة ق تميل على أحد الاتجاهين المتعامدين بزاوية قياسها ٦٠°

∴ من △ ب ء حـ :

حـ ء = ٣٠ حا ٣٠° = ١٥ سم

، ب ء = ٣٠ حتا ٣٠° = ٢٥,٩٨ سم

، م ء = م ب + ب ء = ٣ + ٢٥,٩٨ = ٢٨,٩٨ سم

∴ $ج_م$ = ق حتا ٦٠° × حـ ء + ق حا ٦٠° × م ء

= ق حتا ٦٠° × ١٥ + ق حا ٦٠° × ٢٨,٩٨ = ٣٢,٦ ق

، ∵ $ج_م = ٦٢٠$ ∴ $٦٢٠ = ق × ٣٢,٦$ ∴ $ق = ١٩,٠٢$ نيوتن

الاختبار الثالث

السؤال الأول : أكمل ما يلي

(٣) إذا كانت : $\overrightarrow{ق}_١ \parallel \overrightarrow{ق}_٢$ ، $\overrightarrow{ق}_١ = \overrightarrow{س} - ٢ \overrightarrow{ص}$

، $\| \overrightarrow{ق}_٢ \| = ٤ \sqrt{٥}$ وحدة فإن : $\overrightarrow{ق}_٢ = ...$

الحل

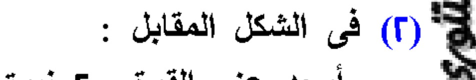
∵ $\overrightarrow{ق}_١ \parallel \overrightarrow{ق}_٢$ ∴ $\overrightarrow{ق}_٢ = ك \overrightarrow{ق}_١ = (ك ، - ٢ ك)$

∴ $\| \overrightarrow{ق}_٢ \| = \| (ك ، - ٢ ك) \|$

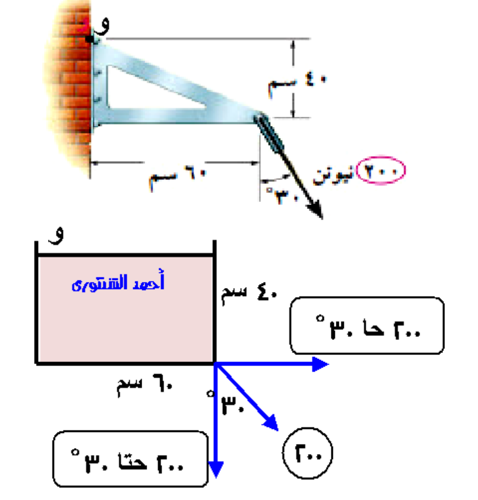
∴ $٤ \sqrt{٥} = | ك | \sqrt{٥}$ ∴ $| ك | = ٤$

∴ $ك = \pm ٤$ ∴ $\overrightarrow{ق}_٢ = \pm ٤ (١ ، - ٢)$

(٢) في الشكل المقابل :



أوجد عزم القوة ٢٠٠ نيوتن بالنسبة لنقطة و



الحل

$ج_و = ٢٠٠ حا ٣٠° × ٤٠ - ٢٠٠ حتا ٣٠° × ٦٠$

$= - ٦٣٩٢,٣$ نيوتن . سم

السؤال الخامس :

(أ) فى الشكل المقابل : اوجد مجموع عزوم القوى بالنسبة للنقطة و

الحل

من هندسة الشكل نجد أن :

أ (٨ ، ٠ ، ٦) ، ب (٨ ، ١٢ ، ٦)

حـ (٨ ، ١٢ ، ٠) ، ء (٠ ، ١٢ ، ٦)

$\therefore \overrightarrow{\text{أب}} = (\text{٨ ، ١٢ ، ٦}) - (\text{٨ ، ٠ ، ٦}) = (\text{٠ ، ١٢ ، ٠})$

$\therefore \|\overrightarrow{\text{أب}}\| = \text{١٢}$

$، \overrightarrow{\text{ق}_1} = \text{ق}_1 \left(\frac{\overrightarrow{\text{أب}}}{\|\overrightarrow{\text{أب}}\|} \right) = \text{١٥} \times \left(\frac{(\text{٠ ، ١٢ ، ٠})}{\text{١٢}} \right) = (\text{٠ ، ١٥ ، ٠})$

$، \overrightarrow{\text{ءحـ}} = (\text{٨ ، ١٢ ، ٠}) - (\text{٠ ، ١٢ ، ٦}) = (\text{٨ ، ٠ ، −٦})$

$\therefore \|\overrightarrow{\text{ءحـ}}\| = \text{١٠}$

$، \overrightarrow{\text{ق}_2} = \text{ق}_2 \left(\frac{\overrightarrow{\text{ءحـ}}}{\|\overrightarrow{\text{ءحـ}}\|} \right) = \text{٣٠} \times \left(\frac{(\text{٨ ، ٠ ، −٦})}{\text{١٠}} \right) = (\text{٢٤ ، ٠ ، −١٨})$

$\therefore \overrightarrow{\text{جـ}_\text{و}} = \overrightarrow{\text{وأ}} \times \overrightarrow{\text{ق}_1} + \overrightarrow{\text{وء}} \times \overrightarrow{\text{ق}_2}$

$$= \begin{vmatrix} \overrightarrow{\text{س}} & \overrightarrow{\text{ص}} & \overrightarrow{\text{ع}} \\ \text{٨} & \text{٠} & \text{٦} \\ \text{٠} & \text{١٥} & \text{٠} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \overrightarrow{\text{س}} & \overrightarrow{\text{ص}} & \overrightarrow{\text{ع}} \\ \text{٠} & \text{١٢} & \text{٦} \\ \text{٢٤} & \text{٤} & \text{−١٨} \end{vmatrix}$$

$= -\text{٩٠}\ \overrightarrow{\text{س}} + \text{١٢٠}\ \overrightarrow{\text{ع}} - \text{٢١٦}\ \overrightarrow{\text{س}} - \text{١٤٤}\ \overrightarrow{\text{ص}} - \text{٢٨٨}\ \overrightarrow{\text{ع}}$

$= -\text{٣٠٦}\ \overrightarrow{\text{س}} - \text{١٤٤}\ \overrightarrow{\text{ص}} - \text{١٦٨}\ \overrightarrow{\text{ع}}$

الاختبار الرابع

السؤال الأول : أختر الاجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة

(٣) أثرت قوة $\overrightarrow{\text{ق}} = \text{ق}_\text{س} \overrightarrow{\text{س}} + \text{ق}_\text{ص} \overrightarrow{\text{ص}} + \text{ق}_\text{ع} \overrightarrow{\text{ع}}$ فى نقطة أ متجه موضعها بالنسبة لنقطة الأصل هو $\text{أ}_\text{س} \overrightarrow{\text{س}} + \text{أ}_\text{ص} \overrightarrow{\text{ص}} - \text{أ}_\text{ع} \overrightarrow{\text{ع}}$ فإن مركبة عزم $\overrightarrow{\text{ق}}$ حول محور س هى .....

(أ) $\text{ق}_\text{س} \times \text{أ}_\text{ع} - \text{ق}_\text{ع} \times \text{أ}_\text{س}$ (ب) $\text{ق}_\text{ع} \times \text{أ}_\text{ص} + \text{ق}_\text{ص} \times \text{أ}_\text{ع}$

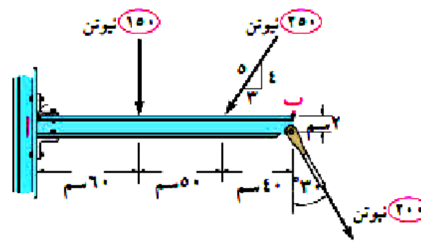
(حـ) $\text{ق}_\text{س} \times \text{أ}_\text{ص} + \text{ق}_\text{ص} \times \text{أ}_\text{س}$ (ء) $\text{ق}_\text{ص} \times \text{أ}_\text{ص} + \text{ق}_\text{ع} \times \text{أ}_\text{ع}$

الحل

$\text{ق}_\text{ع} \times \text{أ}_\text{ص} + \text{ق}_\text{ص} \times \text{أ}_\text{ع}$

السؤال الثانى :

(٢) فى الشكل المقابل : ثلاث قوى مستوية تؤثر فى القضيب أ ب اوجد القياسات الجبرية لمجموع عزوم القوى بالنسبة لكل من النقطتين أ ، ب



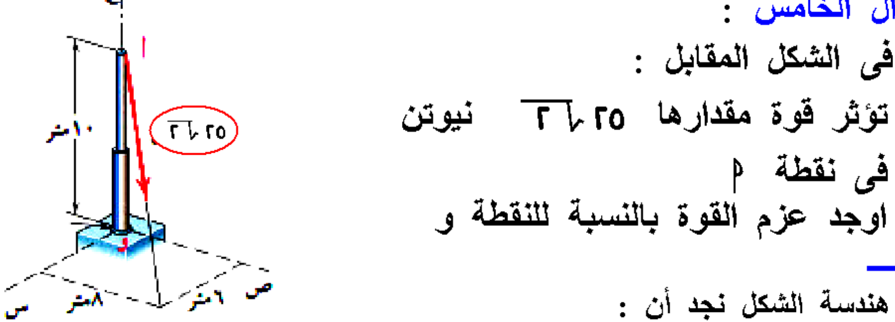
الحل

$$ع_{أ} = -150 \times 60 - 250\ حا\ \theta \times 110$$
$$- 200\ حتا\ 30^\circ \times 150$$
$$+ 200\ حا\ 30^\circ \times 2$$
$$= -9000 - 250 \times \frac{4}{5} \times 110$$
$$- 200 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times 150$$
$$+ 200 \times \frac{1}{2} \times 2$$
$$= -30800 - 15000\sqrt{3}\ \text{نيوتن . سم}$$

$$ع_{ب} = 150 \times 90 + 250\ حا\ \theta \times 40 + 200\ حا\ 30^\circ \times 2$$
$$= 150 \times 90 + 250 \times \frac{4}{5} \times 40 + 200 \times \frac{1}{2} \times 2$$
$$= 21700\ \text{نيوتن . سم}$$

السؤال الخامس :

(٢) فى الشكل المقابل : تؤثر قوة مقدارها $25\sqrt{2}$ نيوتن فى نقطة أ اوجد عزم القوة بالنسبة للنقطة و



الحل

من هندسة الشكل نجد أن :

أ $(0 , 0 , 10)$ ، ب $(6 , 8 , 0)$ ،

$$\therefore \overrightarrow{أب} = (6 , 8 , 0) - (0 , 0 , 10)$$
$$= (6 , 8 , -10)$$
$$\therefore \|\overrightarrow{أب}\| = 10\sqrt{2}$$
$$، \vec{ق} = ق \left(\frac{\overrightarrow{أب}}{\|\overrightarrow{أب}\|} \right)$$
$$= 25\sqrt{2} \times \left(\frac{(6 , 8 , -10)}{10\sqrt{2}} \right)$$
$$= (15 , 20 , -25)$$

$$\therefore \vec{ع}_{و} = \overrightarrow{وأ} \times \vec{ق} = \begin{vmatrix} \vec{س} & \vec{ص} & \vec{ع} \\ 0 & 0 & 10 \\ 15 & 20 & -25 \end{vmatrix} = -200\,\vec{س} + 150\,\vec{ص}$$

الاختبار الخامس

أولاً : أجب عن السؤال التالى :

السؤال الأول : أكمل ما يلى :

(٢) إذا اثرت القوة $\overleftarrow{ق}$ = ٢ $\overleftarrow{س}$ − $\overleftarrow{ص}$ + ٥ $\overleftarrow{ع}$ فى النقطة م متجه موضعها $\overleftarrow{س}$ − ٣ $\overleftarrow{ع}$ فإن عزم $\overleftarrow{ق}$ بالنسبة للنقطة ب متجه موضعها $\overleftarrow{ص}$ + ٣ $\overleftarrow{ع}$ يساوى ....

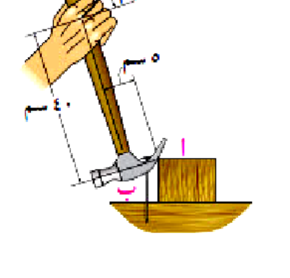
الحل

$\overleftarrow{ب م}$ = (١ ، ٠ ، −٣) − (٠ ، ١ ، ٣) = (١ ، −١ ، −٣)

$\overleftarrow{ج}_ب$ = $\overleftarrow{ب م}$ × $\overleftarrow{ق}$ = $\begin{vmatrix} \overleftarrow{س} & \overleftarrow{ص} & \overleftarrow{ع} \\ ١ & -١ & -٦ \\ ٢ & -١ & ٥ \end{vmatrix}$ = − ١١ $\overleftarrow{س}$ − ١٧ $\overleftarrow{ص}$ + $\overleftarrow{ع}$

السؤال الثانى :

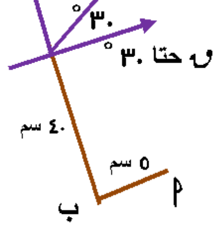
(٢) الشكل المقابل :



يوضح القوة ق اللازمة لنزع مسمار عند ب ، إذا كان معيار عزم القوة حول نقطة م اللازمة لنزع المسمار يساوى ٢٠٠ نيوتن . سم

اوجد معيار القوة ق

الحل



∵ $ج_م$ = ق حتا ٣٠° × ٤٠ + ق حا ٣٠° × ٥

∴ ٢٠٠ = ق × $\frac{\sqrt{3}}{2}$ × ٤٠ + ق × $\frac{1}{2}$ × ٥

∴ ٢٠٠ = (٢٠ $\sqrt{3}$ + ٥) ق

و منها : ق = ٠,٤ نيوتن

السؤال الخامس :

(٢) قوتان $\overleftarrow{ق}_1$ = ٢ $\overleftarrow{س}$ − $\overleftarrow{ص}$ ، $\overleftarrow{ق}_2$ = $\overleftarrow{س}$ − ٢ $\overleftarrow{ص}$ تؤثران فى النقطتين م (١ ، ١) ، ب (٠ ، −٤) على الترتيب اوجد عزم المجموعة حول أى نقطة فى المستوى

الحل

∵ $\overleftarrow{ق}_1$ = (٢ ، −١) ، $\overleftarrow{ق}_2$ = (−٢ ، ١) ∴ $\overleftarrow{ق}_1$ = − $\overleftarrow{ق}_2$

∴ $\overleftarrow{ق}_1$ // $\overleftarrow{ق}_2$ و تضادها فى الاتجاه ، || $\overleftarrow{ق}_1$ || = || $\overleftarrow{ق}_2$ ||

∴ المجموعة تكون ازدواج

، $\overleftarrow{ج}_و$ = $\overleftarrow{و م}$ × $\overleftarrow{ق}_1$ + $\overleftarrow{و ب}$ × $\overleftarrow{ق}_2$

= (١ ، ١) × (٢ ، −١) + (٠ ، −٤) × (−٢ ، ١)

= − ٣ $\overleftarrow{ع}$ − ٨ $\overleftarrow{ع}$ = − ١١ $\overleftarrow{ع}$





المتميز

فى

الرياضيات التطبيقية

الأستاتيكا

الجزء النظرى
و
حلول التمارين
الوحدة الثالثة

$م_س$ ر | $ج_و$ | ($س_م$ ، $ص_م$) | $\|\overline{ق}\|$

إعداد : أحمد الشنتورى

الصف الثالث الثانوى

القسم العلمى

شعبة الرياضيات

٢٠١٧ / ٢٠١٨

الوحدة الثالثة .... القوى المتوازية المستوية

٣ – ١ محصلة القوى المتوازية المستوية

أولاً : محصلة قوتين متوازيتين و متحدتى الاتجاه :

قاعدة :

محصلة قوتين متوازيتين و متحدى الاتجاه هى قوة فى اتجاههما و معيارها يساوى مجموع معيارى القوتين و يقسم خط عملها المسافة بين خطى عمل القوتين بنسبة عكسية لمعياريهما

ففى الشكل المقابل :

$\overleftarrow{ق_1}$ ، $\overleftarrow{ق_2}$ قوتان متوازيتان فى نفس الاتجاه تؤثران فى النقطتين ٩ ، ب على الترتيب من جسم متماسك فإن :

$\overleftarrow{ق_1} = ق_1 \overleftarrow{ى}$ ، $\overleftarrow{ق_2} = ق_2 \overleftarrow{ى}$

$\therefore \overleftarrow{ح} = (ق_1 + ق_2) \overleftarrow{ى}$

حيث : $\overleftarrow{ى}$ متجه وحدة فى اتجاه القوتين ، $\overleftarrow{ح}$ محصلة القوتين

و تتعين المحصلة تعيناً تاماً كما يلى :

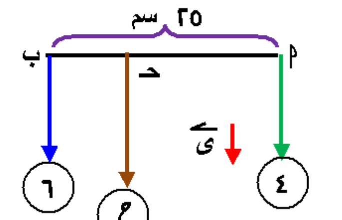
(١) مقدار المحصلة : $ح = ق_1 + ق_2$

(٢) اتجاه المحصلة : هو نفس اتجاه القوتين

(٣) نقطة تأثير المحصلة : هى نقطة حـ $\in \overline{٩ ب}$ و تقسمها من الداخل بحيث : $ق_1 \times ٩ حـ = ق_2 \times ب حـ$

إجابة حاول أن تحل (١) صفحة ٤٦

قوتان متوازيتان تعملان فى نفس الاتجاه مقدارهما ٤ ، ٦ نيوتن تؤثران فى نقطتين ٩ ، ب حيث ٩ ب = ٢٥ سم أوجد محصلة القوتين



الحل

نفرض $\overleftarrow{ى}$ متجه وحدة فى اتجاه القوتين

$\therefore \overleftarrow{ق_1} = ٤ \overleftarrow{ى}$ ، $\overleftarrow{ق_2} = ٦ \overleftarrow{ى}$

، $\overleftarrow{ح} = ٤ \overleftarrow{ى} + ٦ \overleftarrow{ى} = ١٠ \overleftarrow{ى}$

و بفرض أن : المحصلة تؤثر نقطة حـ $\in \overline{٩ ب}$

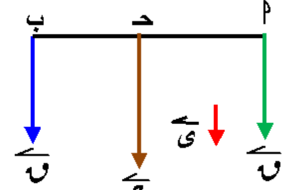
$\therefore ٤ \times ٩ حـ = ٦ \times ب حـ$ $\therefore ٤ \times ٩ حـ = ٦ \times (٢٥ - ٩ حـ)$

$\therefore ٤ ٩ حـ = ١٥٠ - ٦ ٩ حـ$ $\therefore ١٠ ٩ حـ = ١٥٠$ $\therefore ٩ حـ = ١٥$ سم

$\therefore$ مقدار المحصلة : ح = ١٠ نيوتن ، و يعمل اتجاهها فى نفس اتجاه القوتين و تؤثر فى نقطة تبعد عن ٩ بمقدار ١٥ سم

إجابة تفكير ناقد صفحة ٤٦

إذا كانت القوتان متساويتان فأين تقع نقطة تأثير المحصلة



الحل

بفرض أن : مقدار كل من القوتين = ق

$\therefore$ مقدار المحصلة : ح = ٢ ق و يكون :

ق × ٩ حـ = ق × ب حـ

$\therefore$ ٩ حـ = ب حـ أى أن : حـ منتصف $\overline{٩ ب}$

$\therefore$ إذا كانت القوتان متساويتان فإن نقطة تأثير المحصلة تقع فى منتصف المسافة بين خطى عمل القوتين

أولاً : محصلة قوتين متوازيتين و متضادين فى الاتجاه :

قاعدة :

محصلة قوتين متوازيتين و متضادتين فى الاتجاه و غير متساويتين فى المقدار هى قوة فى اتجاه القوة الأكبر معياراً و معيارها يساوى الفرق بين معيارى القوتين و يقسم خط عملها المسافة بين خطى عمل القوتين من الخارج من ناحية القوة الأكبر معياراً بنسبة عكسية لمعياريهما

أحمد الشتنوى

ففى الشكل المقابل :

$\overrightarrow{ق_1}$ ، $\overrightarrow{ق_2}$ قوتان متوازيتان و غير متساويتان و تعملان فى اتجاهين متضادين تؤثران فى النقطتين أ ، ب على الترتيب من جسم متماسك فإذا كان ق١ > ق٢ فإن :

$\overrightarrow{ق_1} = ق_1 \overrightarrow{ى}$ ، $\overrightarrow{ق_2} = ق_2 (-\overrightarrow{ى}) = -ق_2 \overrightarrow{ى}$

∴ $\overrightarrow{ح} = (ق_1 - ق_2)\overrightarrow{ى}$

حيث : $\overrightarrow{ى}$ متجه وحدة فى اتجاه القوة الأكبر معياراً و هى $\overrightarrow{ق_1}$ ، $\overrightarrow{ح}$ محصلة القوتين

و تتعين المحصلة تعيناً تاماً كما يلى :

(١) مقدار المحصلة : $ح = ق_1 - ق_2$

(٢) اتجاه المحصلة : هو نفس اتجاه القوة الأكبر معياراً $\overrightarrow{ق_1}$

(٣) نقطة تأثير المحصلة : هى نقطة حـ التى تقسم $\overline{أب}$ من الخارج بحيث : $ق_1 \times$ أحـ $= ق_2 \times$ ب حـ

إجابة حاول أن تحل (٢) صفحة ٤٧

أوجد محصلة قوتان متوازيتان و متضادتان فى الاتجاه مقدارهما ٧ ، ١٢ نيوتن تؤثران فى نقطتين أ ، ب حيث أ ب = ٢٠ سم

الحل

نفرض $\overrightarrow{ى}$ متجه وحدة فى اتجاه القوة الكبرى

∴ $\overrightarrow{ق_1} = ١٢ \overrightarrow{ى}$ ، $\overrightarrow{ق_2} = -٧ \overrightarrow{ى}$

، $\overrightarrow{ح} = ١٢\overrightarrow{ى} - ٧\overrightarrow{ى} = ٥\overrightarrow{ى}$

و بفرض أن : المحصلة تؤثر نقطة حـ ∈ $\overleftarrow{ب أ}$

∴ ١٢ × أحـ = ٧ × ب حـ ∴ ١٢ × أحـ = ٧ × (٢٠ + أحـ)

∴ ١٢ أحـ = ١٢٠ + ٧ أحـ ∴ ٥ أحـ = ١٢٠ ∴ أحـ = ٢٤ سم

∴ مقدار المحصلة : ح = ٥ نيوتن ، و يعمل اتجاهها فى اتجاه القوة ١٢ نيوتن و تؤثر فى نقطة ∈ $\overleftarrow{ب أ}$ و تقع خارج $\overline{أب}$ و تبعد عن أ بمقدار ٢٤ سم

إجابة تفكير ناقد صفحة ٤٧

ماذا تقول عن محصلة قوتين متساويتين و متوازيتين و متضادتين فى الاتجاه

الحل

محصلة قوتين متساويتين و متوازيتين و متضادتين فى الاتجاه هى المتجه الصفرى " يكونان ما يسمى بالازدواج كما سيأتى لاحقاً "

تعيين إحدى قوتين متوازيتين إذا علمت الأخرى و المحصلة :

إذا علمت إحدى قوتين متوازيتين $\overrightarrow{ق_1}$ و علمت المحصلة $\overrightarrow{ح}$ فإن : لتعيين القوة الثانية $\overrightarrow{ق_2}$ يراعى ما يلى :

[١] نفرض $\overrightarrow{ى}$ متجه وحدة فى اتجاه المحصلة

[٢] يتعين مقدار و اتجاه $\overrightarrow{ق_2}$ من العلاقة : $\overrightarrow{ح} = \overrightarrow{ق_1} + \overrightarrow{ق_2}$

[٣] نقطة تأثير $\overrightarrow{ق_2}$ (و لتكن حـ مثلاً) تتعين من العلاقة :

مجموع عزوم القوى بالنسبة لنقطة حـ = عزم المحصلة بالنسبة لنقطة حـ = صفر

إجابة حاول أن تحل (٣) صفحة ٤٨

قوتان متوازيتان مقدار محصلتهما ٣٥٠ نيوتن و مقدار إحدى القوتين ٥٠٠ نيوتن و تعمل على بعد ٥١ سم من المحصلة ، أوجد القوة الثانية و البعد بين خطى عمل القوتين إذا كانت القوة المعلومة و المحصلة تعملان : أولاً : فى اتجاه واحد ثانياً : فى اتجاهين متضادين

الحل

نفرض ى⃖ متجه وحدة فى اتجاه المحصلة

∴ ح⃖ = ٣٥٠ ى⃖ ، ق⃖١ = ٥٠٠ ى⃖

أولاً : ح⃖ ، ق⃖١ فى اتجاه واحد

∵ ح⃖ = ق⃖١ + ق⃖٢ ∴ ٣٥٠ ى⃖ = ٥٠٠ ى⃖ + ق٢ ى⃖

∴ ق٢ ى⃖ = − ١٥٠ ى⃖

أى أن : ق⃖٢ مقدارها ١٥٠ نيوتن و اتجاهها مضاد لاتجاه المحصلة

∵ مجموع عزوم القوى حول نقطة حـ = عزم المحصلة حول نقطة حـ = ٠ .

∴ ١٥٠ × ب حـ − ٥٠٠ × ٥١ = ٠ و منها : ب حـ = ١٧٠ سم

∴ أ ب = ١٧٠ − ٥١ = ١١٩ سم أى أن البعد القوتين = ١١٩ سم

ثانياً : ح⃖ ، ق⃖١ فى اتجاهين متضادين

∵ ح⃖ = ق⃖١ + ق⃖٢

∴ ٣٥٠ ى⃖ = − ٥٠٠ ى⃖ + ق٢ ى⃖

∴ ق٢ ى⃖ = ٨٥٠ ى⃖

أى أن : ق⃖٢ مقدارها ٨٥٠ نيوتن و اتجاهها نفس اتجاه المحصلة

∵ مجموع عزوم القوى حول نقطة حـ = عزم المحصلة حول نقطة حـ = ٠ .

∴ ٥٠٠ × ٥١ − ٨٥٠ × ب حـ = ٠ و منها : ب حـ = ٣٠ سم

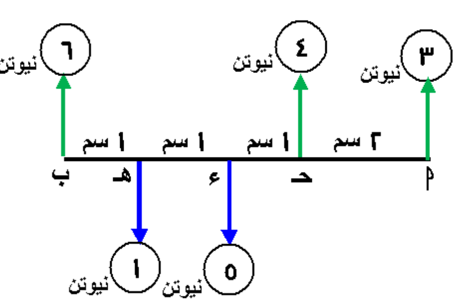
∴ أ ب = ٥١ − ٣٠ = ٢١ سم أى أن البعد القوتين = ٢١ سم

عزوم القوى المتوازية المستوية :

نظرية :

مجموع عزوم أى عدد محدود من القوى المتوازية المستوية بالنسبة لنقطة يساوى عزم محصلة هذه القوى بالنسبة لنفس النقطة

إجابة حاول أن تحل (٤) صفحة ٤٩



الشكل المقابل يمثل مجموعة من القوى المتوازية على أ ب أوجد القياس الجبرى لمجموع عزوم هذه القوى بالنسبة : (أ) نقطة أ

(ب) نقطة منتصف أ ب

الحل

(أ) القياس الجبرى لمجموع عزوم القوى بالنسبة لنقطة أ =

٥ × ٣ + ١ × ٤ − ٤ × ٢ − ٦ × ٥ = − ١٩ نيوتن . سم

(ب) القياس الجبرى لمجموع عزوم القوى بالنسبة لنقطة منتصف أ ب =

٣ × ٢,٥ + ٤ × ٠,٥ + ٥ × ٠,٥ + ١ × ١,٥ − ٦ × ٢,٥

= − ١,٥ نيوتن . سم

محصلة عدة قوى متوازية مستوية :

إذا كانت : ق⃖١ ، ق⃖٢ ، ق⃖٣ ، .... ، ق⃖ن عدة قوى متوازية مستوية تؤثر فى النقط أ١ ، أ٢ ، أ٣ ، .... ، أن فإن :

(١) مقدار و اتجاه المحصلة يتعين من العلاقة :

ح⃖ = ق⃖١ + ق⃖٢ + ق⃖٣ + ... + ق⃖ن

و ذلك بفرض ى⃖ متجه وحدة فى اتجاه إحدى القوى

(٢) نقطة تأثير المحصلة و لتكن (حـ مثلاً) : تتعين من العلاقة :

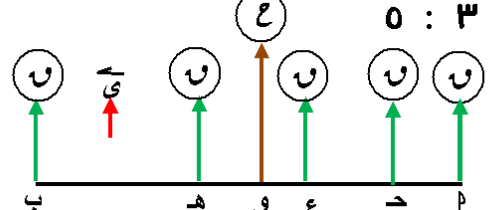
مجموع عزوم القوى بالنسبة لنقطة حـ = عزم المحصلة بالنسبة لنقطة حـ حيث : أ١ حـ = ‖ مجموع عزوم القوى حول أ١ ‖ ÷ ‖ ح⃖ ‖

مع مراعاة اتجاه دوران عزم المحصلة بالنسبة لاتجاه دوران عقارب الساعة

إجابة حاول أن تحل (٥) صفحة ٥٠

إذا كانت حـ ، ء ، هـ ∈ $\overline{\text{أب}}$ بحيث أحـ : حـء : ءهـ : هـب = ١ : ٣ : ٥ : ٧ أثرت قوى متوازية و فى نفس الاتجاه و متساوية فى المقدار فى النقط أ ، حـ ، ء ، هـ ، ب برهن أن المحصلة تقسم $\overline{\text{أب}}$ بنسبة ٣ : ٥

الحل



بفرض أن : أحـ = س ، حـء = ٣ س ، ءهـ = ٥ س ، هـب = ٧ س ، ى متجه وحدة فى اتجاه القوى ، و أن مقدار كل قوة تؤثر فى النقط أ ، حـ ، ء ، هـ ، ب يساوى ق وحدة قوة ∴ ح = ٥ ق ى

أى أن : مقدار المحصلة ٥ ق وحدة قوة و تعمل فى نفس اتجاه القوى

و بفرض أن : المحصلة تعمل فى نقطة و ∈ $\overleftrightarrow{\text{أب}}$

، ∵ مجموع عزوم القوى حول نقطة ب = عزم المحصلة حول نقطة ب

∴ عزم المحصلة حول نقطة ب = ق × ١٦ س + ق × ١٥ س + ق × ١٢ س + ق × ٧ س = ٥٠ ق س

∴ المحصلة تعمل على الدوران حول ب فى اتجاه عكس دوران عقارب الساعة

أى أن : و ∈ $\overline{\text{أب}}$ ، ٥ ق × ب و = ٥٠ ق س

و منها : ب و = ١٠ س ∴ أ و = ٦ س

∴ أ و : ب و = ٣ : ٥ أى أن : المحصلة تقسم $\overline{\text{أب}}$ بنسبة ٣ : ٥

إجابة حاول أن تحل (٦) صفحة ٥٠

الشكل المقابل يوضح قضيب خفيف $\overline{\text{أب}}$ أثرت عليه القوى المتوازية الموضحة بالشكل فإذا كانت المحصلة ٣٠٠ نيوتن و تعمل لأعلى و تؤثر فى نقطة على القضيب تبعد ٤ متر من أ أوجد ق ، ك

الحل

بفرض ى متجه وحدة فى اتجاه المحصلة كما بالشكل المقابل ، ∵ ح = ٣٠٠ نيوتن

∴ ٣٠٠ ى = (٢٠٠ + ك − ١٠٠ − ق) ى

و منها : ك − ق = ٢٠٠ (١)

، ∵ مجموع عزوم القوى حول نقطة أ = عزم المحصلة حول نقطة أ

∴ ٢٠٠ × ١٠ − ق × ٧ + ك × ٣ = ٣٠٠ × ٤

∴ ٧ ق − ٣ ك = ٨٠٠ (٢)

بضرب (١) × ٣ و جمعها مع (٢) ينتج : ٤ ق = ١٤٠٠ ∴ ق = ٣٥٠ نيوتن

بالتعويض فى (١) ينتج : ك = ٥٥٠ نيوتن

إجابة حاول أن تحل (٧) صفحة ٥١

قوتان متوازيتان و فى نفس الاتجاه مقدارهما ق ، ٢ ق تؤثران فى نقطتين أ ، ب فإذا تحركت القوة ٢ ق موازية نفسها فى اتجاه $\overrightarrow{\text{أب}}$ مسافة س سم ، أثبت أن محصلة القوتين تتحرك فى نفس الاتجاه مسافة قدرها $\frac{٢}{٣}$ س

الحل

بفرض ى متجه وحدة فى اتجاه المحصلة كما بالشكل المقابل ∴ ح = ٣ ق ى

∴ ح = ٣ ق (١)

، فى الحالة الأولى : نفرض أن : المحصلة تؤثر عند نقطة حـ ، ∵ مجموع عزوم القوى حول نقطة أ = عزم المحصلة حول نقطة أ

∴ ٢ ق × ﻢب = ع × ﻢحـ (٢)

، فى الحالة الثانية : نفرض أن : المحصلة تؤثر عند نقطة حـ/

، ∵ مجموع عزوم القوى حول نقطة ﻢ = عزم المحصلة حول نقطة ﻢ

∴ ٢ ق × (ﻢب + س) = ع × ﻢحـ/

∴ ٢ ق × ﻢب + ٢ ق × س = ع × ﻢحـ/ (٣)

بطرح (٢) من (٣) ينتج : ق × س = ع × (ﻢحـ/ − ﻢحـ)

∴ ٢ ق × س = ع × حـ/حـ ، بالتعويض من (١) ينتج :

٢ ق × س = ٣ ق × حـ/حـ و منها : ٢ س = ٣ حـ/حـ

حـ/حـ = ٢/٣ س أى أن : المحصلة تتحرك مسافة ٢/٣ س سم

إجابة حاول أن تحل (٨) صفحة ٥١

تؤثر القوتان ق١ = ٣ سَ − صَ ، ق٢ = − ٩ سَ + ٣ صَ

فى النقطتين ﻢ (− ١ ، ٠) ، ب (١ ، ٢) على الترتيب

أوجد محصلة القوتين و نقطة تأثيرها

الحل

ع = ق١ + ق٢ = − ٦ سَ + ٢ صَ

، ∵ ق٢ = − ٣ ق١

∴ القوتان متزازيتان و متضادتان فى الاتجاه

و بفرض أن المحصلة تؤثر فى النقطة حـ (س ، ص)

∴ حـ تقسم ﻢب من الخارج بنسبة ٣ : ١

و من قانون التقسيم ينتج :

حـ = ((٣ × ١ − ١ × (−١)) / (٣ − ١) ، (٣ × ٢ − ١ × ٠) / (٣ − ١)) = (٤/٢ ، ٦/٢) = (٢ ، ٣)

حل تمارين (٣ − ١) صفحة ٥٢ بالكتاب المدرسى

أختر الاجابة الصحيحة من بين الاجابات المعطاة :

(١) قوتان متوازيتان و متضادتان فى الاتجاه مقدارهما ٧ ، ١٢ نيوتن فإن مقدار محصلتهما يساوى .... نيوتن

(ﻢ) ١٩ (ب) ١٢ (حـ) ٧ (ء) ٥

(٢) قوتان متوازيتان و متحدا الاتجاه مقدارهما ٧ ، ١٠ نيوتن تؤثران فى النقطتين ﻢ ، ب حيث ﻢ ب = ٥١ سم فإذا كانت محصلتهما تؤثر فى نقطة حـ فإن ﻢ حـ = ... سم

(ﻢ) ٣٠ (ب) ٢٧ (حـ) ٢١ (ء) ١٢

(٣) قوتان متوازيتان و متحدا الاتجاه مقدارهما ٥ ، ٧ نيوتن فإن مقدار محصلتهما يساوى .... نيوتن

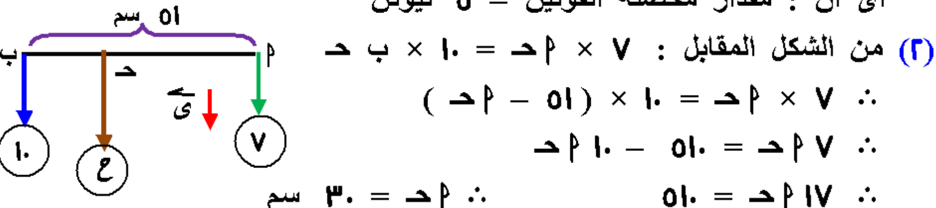
(ﻢ) ١٢ (ب) ٦ (حـ) ٢ (ء) ١

الحل

(١) بفرض ى متجه وحدة فى اتجاه ق٢

∴ ع = ق١ + ق٢ = − ٧ ى + ١٢ ى = ٥ ى

أى أن : مقدار محصلة القوتين = ٥ نيوتن



(٢) من الشكل المقابل : ٧ × ﻢحـ = ١٠ × ب حـ

∴ ٧ × ﻢحـ = ١٠ × (٥١ − ﻢحـ)

∴ ٧ ﻢحـ = ٥١٠ − ١٠ ﻢحـ

∴ ١٧ ﻢحـ = ٥١٠ ∴ ﻢحـ = ٣٠ سم

(٣) بفرض ى متجه وحدة فى اتجاه

∴ ع = ق١ + ق٢ = ٥ ى + ٧ ى = ١٢ ى

أى أن : مقدار محصلة القوتين = ١٢ نيوتن

أجب عن الأسئلة الآتية :

فى التمارين ٤ – ٦ قوتان $\overrightarrow{ق_1}$ ، $\overrightarrow{ق_2}$ تؤثران فى النقطتين أ ، ب فإذا كانت محصلتهما $\overrightarrow{ح}$ تؤثر فى نقطة حـ ∈ $\overleftrightarrow{أب}$

(٤) أوجد مقدار و اتجاه المحصلة و طول $\overline{أحـ}$ فى كل مما يأتى (القوتان فى نفس الاتجاه)

(أ) $ق_1$ = ٩ نيوتن ، $ق_2$ = ١٧ نيوتن ، أب = ١٣ سم

(ب) $ق_1$ = ٢٣ نيوتن ، $ق_2$ = ١٥ نيوتن ، أب = ٥٧ سم

(حـ) $ق_1$ = ١٦ نيوتن ، $ق_2$ = ١٠ نيوتن ، أب = ٣٠ سم

الحل

بفرض $\overrightarrow{ى}$ متجه وحدة فى اتجاه القوتين

(أ) ∴ $\overrightarrow{ق_1}$ = ٩ $\overrightarrow{ى}$ ، $\overrightarrow{ق_2}$ = ١٧ $\overrightarrow{ى}$

، $\overrightarrow{ح}$ = (٩ + ١٧) $\overrightarrow{ى}$ = ٢٦ $\overrightarrow{ى}$

و بفرض أن : المحصلة تؤثر نقطة حـ ∈ $\overline{أب}$

∴ ٩ × أحـ = ١٧ × ب حـ

∴ ٩ × أحـ = ١٧ × (١٣ – أحـ)

∴ ٩ أحـ = ٢٢١ – ١٧ أحـ ∴ ٢٦ أحـ = ٢٢١ ∴ أحـ = ٨,٥ سم

∴ مقدار المحصلة : ح = ٢٦ نيوتن ، و يعمل اتجاهها فى نفس اتجاه القوتين و تؤثر فى نقطة تبعد عن أ بمقدار ٨,٥ سم

(ب) ∴ $\overrightarrow{ق_1}$ = ٢٣ $\overrightarrow{ى}$ ، $\overrightarrow{ق_2}$ = ١٥ $\overrightarrow{ى}$

، $\overrightarrow{ح}$ = (٢٣ + ١٥) $\overrightarrow{ى}$ = ٣٨ $\overrightarrow{ى}$

و بفرض أن : المحصلة تؤثر نقطة حـ ∈ $\overline{أب}$

∴ ٢٣ × أحـ = ١٥ × ب حـ

∴ ٢٣ × أحـ = ١٥ × (٥٧ – أحـ)

∴ ٢٣ أحـ = ٨٥٥ – ١٥ أحـ ∴ ٣٨ أحـ = ٨٥٥ ∴ أحـ = ٢٢,٥ سم

∴ مقدار المحصلة : ح = ٣٨ نيوتن ، و يعمل اتجاهها فى نفس اتجاه القوتين و تؤثر فى نقطة تبعد عن أ بمقدار ٢٢,٥ سم

(حـ) ∴ $\overrightarrow{ق_1}$ = ١٦ $\overrightarrow{ى}$ ، $\overrightarrow{ق_2}$ = ١٠ $\overrightarrow{ى}$

، $\overrightarrow{ح}$ = (١٦ + ١٠) $\overrightarrow{ى}$ = ٢٦ $\overrightarrow{ى}$

و بفرض أن : المحصلة تؤثر نقطة حـ ∈ $\overline{أب}$

∴ ١٦ × أحـ = ١٠ × ب حـ

∴ ١٦ × أحـ = ١٠ × (٣٠ – أحـ)

∴ ١٦ أحـ = ٣٠٠ – ١٠ أحـ ∴ ٢٦ أحـ = ٣٠٠ ∴ أحـ = ١١,٥٤ سم

∴ مقدار المحصلة : ح = ٢٦ نيوتن ، و يعمل اتجاهها فى نفس اتجاه القوتين و تؤثر فى نقطة تبعد عن أ بمقدار ١١,٥٤ سم

(٥) إذا كانت $\overrightarrow{ق_1}$ ، $\overrightarrow{ق_2}$ فى نفس الاتجاه أجب عما يأتى :

(أ) $ق_1$ = ٨ نيوتن ، ح = ١٣ نيوتن ، أحـ = ١٠ سم

أوجد : $ق_2$ ، أب

(ب) $ق_2$ = ٦ نيوتن ، أحـ = ٢٤ سم ، أب = ٥٦ سم

أوجد : $ق_1$ ، ح

(حـ) $ق_1$ = ٦ نيوتن ، أحـ = ٩ سم ، حـ ب = ٨ سم

أوجد : $ق_1$ ، ح

الحل

بفرض $\overrightarrow{ى}$ متجه وحدة فى اتجاه القوتين

(أ) ∴ $\overrightarrow{ق_1}$ = ٨ $\overrightarrow{ى}$ ، $\overrightarrow{ق_2}$ = $ق_2$ $\overrightarrow{ى}$

، $\overrightarrow{ح}$ = ١٣ $\overrightarrow{ى}$

∴ ١٣ $\overrightarrow{ى}$ = ٨ $\overrightarrow{ى}$ + $ق_2$ $\overrightarrow{ى}$ ∴ $ق_2$ = ٥ $\overrightarrow{ى}$

أى أن : $ق_2$ = ٥ نيوتن

، ٨ × ١٠ = ٥ × ب حـ ∴ ب حـ = ١٦ سم ∴ أ ب = ٢٦ سم

(ب) ∵ $\overrightarrow{ق_1}$ = $ق_1$ $\overrightarrow{ى}$ ، $\overrightarrow{ق_2}$ = ٦ $\overrightarrow{ى}$

، $\overrightarrow{ح}$ = ح $\overrightarrow{ى}$ ، $ق_1$ × ٢٤ = ٦ × ٥٦

و منها : $ق_1$ = ١٤ نيوتن

∴ $\overrightarrow{ح}$ = (١٤ + ٦) $\overrightarrow{ى}$ = ٢٠ $\overrightarrow{ى}$ ∴ ح = ٢٠ نيوتن

(حـ) ∵ $\overrightarrow{ق_1}$ = ٦ $\overrightarrow{ى}$ ، $\overrightarrow{ق_2}$ = $ق_2$ $\overrightarrow{ى}$

، $\overrightarrow{ح}$ = ح $\overrightarrow{ى}$ ، ٦ × ٩ = ٨ × $ق_2$

و منها : $ق_2$ = $\frac{٢٧}{٤}$ = ٦,٧٥ نيوتن

∴ $\overrightarrow{ح}$ = (٦ + ٦,٧٥) $\overrightarrow{ى}$ = ١٢,٧٥ $\overrightarrow{ى}$ ∴ ح = ١٢,٧٥ نيوتن

(٦) إذا كانت $\overrightarrow{ق_1}$ ، $\overrightarrow{ق_2}$ متضادتان فى الاتجاه أجب عما يأتى :

(أ) $ق_1$ = ١٥ نيوتن ، ح = ٢٠ نيوتن ، أ حـ = ٧٠ سم

أوجد : $ق_2$ ، أ ب

(ب) $ق_2$ = ٦ نيوتن ، أ حـ = ٢٤ سم ، حـ ∉ $\overline{أ ب}$

، أ ب = ٥٦ سم أوجد : $ق_1$ ، ح

(حـ) $ق_1$ = ٦ نيوتن ، أ حـ = ٩ سم ، حـ ∉ $\overline{أ ب}$

، حـ ب = ٨ سم أوجد : $ق_1$ ، ح

الحل

بفرض $\overrightarrow{ى}$ متجه وحدة فى اتجاه المحصلة

(أ) ∵ $\overrightarrow{ق_1}$ = − ١٥ $\overrightarrow{ى}$ ، $\overrightarrow{ق_2}$ = $ق_2$ $\overrightarrow{ى}$

، $\overrightarrow{ح}$ = ٢٠ $\overrightarrow{ى}$

∴ ٢٠ $\overrightarrow{ى}$ = − ١٥ $\overrightarrow{ى}$ + $ق_2$ $\overrightarrow{ى}$ ∴ $ق_2$ = ٣٥ $\overrightarrow{ى}$

أى أن : $ق_2$ = ٣٥ نيوتن و تعمل فى نفس اتجاه المحصلة

، ١٥ × ٧٠ = ٣٥ × ب حـ و منها : ب حـ = ٣٠ سم

∴ أ ب = ٤٠ سم

(ب) ∵ $ق_1$ × ٢٤ = ٦ × ٨٠

و منها : $ق_1$ = ٢٠ نيوتن ، ∵ $ق_1$ > $ق_2$

∴ $\overrightarrow{ق_1}$ تعمل فى نفس اتجاه المحصلة

∴ $\overrightarrow{ق_1}$ = ٢٠ $\overrightarrow{ى}$ ، $\overrightarrow{ق_2}$ = − ٦ $\overrightarrow{ى}$ ، $\overrightarrow{ح}$ = ح $\overrightarrow{ى}$

∴ $\overrightarrow{ح}$ = (٢٠ − ٦) $\overrightarrow{ى}$ = ١٤ $\overrightarrow{ى}$ ∴ ح = ١٤ نيوتن

(حـ) ∵ $ق_2$ × ٨ = ٦ × ٩

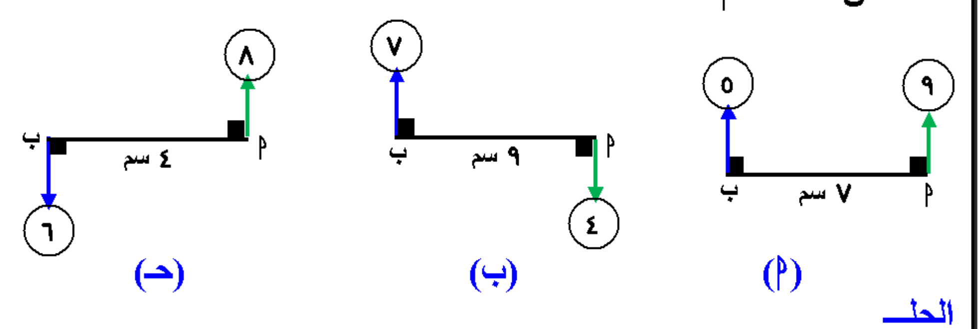
و منها : $ق_2$ = ٦,٧٥ نيوتن ، ∵ $ق_2$ > $ق_1$

∴ $\overrightarrow{ق_2}$ تعمل فى نفس اتجاه المحصلة

∴ $\overrightarrow{ق_1}$ = − ٦,٧٥ $\overrightarrow{ى}$ ، $\overrightarrow{ق_2}$ = ٦ $\overrightarrow{ى}$ ، $\overrightarrow{ح}$ = ح $\overrightarrow{ى}$

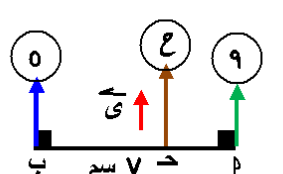
∴ $\overrightarrow{ح}$ = (٦,٧٥ − ٦) $\overrightarrow{ى}$ = ٦,٧٥ $\overrightarrow{ى}$ ∴ ح = ٠,٧٥ نيوتن

(٧) فى كل مما يأتى أوجد مقدار و اتجاه المحصلة و بعد نقطة تأثيرها عن نقطة أ



الحل

(أ) بفرض $\overleftarrow{ى}$ متجه وحدة فى اتجاه القوتين



∴ $\overleftarrow{ق_1}$ = ٩ $\overleftarrow{ى}$ ، $\overleftarrow{ق_2}$ = ٥ $\overleftarrow{ى}$

، $\overleftarrow{ح}$ = (٩ + ٥) $\overleftarrow{ى}$ = ١٤ $\overleftarrow{ى}$

و بفرض أن : المحصلة تؤثر نقطة حـ ∈ $\overline{أب}$

∴ ٩ × أحـ = ٥ × ب حـ

∴ ٩ × أحـ = ٥ × (٧ − أحـ)   ∴ ٩ أحـ = ٣٥ − ٥ أحـ

∴ ١٤ أحـ = ٣٥   ∴ أحـ = ٢,٥ سم

∴ مقدار المحصلة : ح = ١٤ نيوتن ، و يعمل اتجاهها فى نفس اتجاه القوتين و تؤثر فى نقطة تبعد عن أ بمقدار ٢,٥ سم

(ب) نفرض $\overleftarrow{ى}$ متجه وحدة فى اتجاه القوة الكبرى

∴ $\overleftarrow{ق_1}$ = ٧ $\overleftarrow{ى}$ ، $\overleftarrow{ق_2}$ = − ٤ $\overleftarrow{ى}$

، $\overleftarrow{ح}$ = ٧ $\overleftarrow{ى}$ − ٤ $\overleftarrow{ى}$ = ٣ $\overleftarrow{ى}$

و بفرض أن : المحصلة تؤثر نقطة حـ ∈ $\overleftarrow{ب أ}$

∴ ٤ × أحـ = ٧ × ب حـ   ∴ ٤ × أحـ = ٧ × (أحـ − ٩)

∴ ٤ أحـ = ٧ أحـ − ٦٣   ∴ ٣ أحـ = ٦٣   ∴ أحـ = ٢١ سم

∴ مقدار المحصلة : ح = ٣ نيوتن ، و يعمل اتجاهها فى اتجاه القوة ٧ نيوتن و تؤثر فى نقطة ∈ $\overleftarrow{أب}$ و تقع خارج $\overline{أب}$ و تبعد عن أ بمقدار ٢١ سم

(حـ) نفرض $\overleftarrow{ى}$ متجه وحدة فى اتجاه القوة الكبرى

∴ $\overleftarrow{ق_1}$ = ٨ $\overleftarrow{ى}$ ، $\overleftarrow{ق_2}$ = − ٦ $\overleftarrow{ى}$

، $\overleftarrow{ح}$ = ٨ $\overleftarrow{ى}$ − ٦ $\overleftarrow{ى}$ = ٢ $\overleftarrow{ى}$

و بفرض أن : المحصلة تؤثر نقطة حـ ∈ $\overleftarrow{ب أ}$

∴ ٨ × أحـ = ٦ × ب حـ

∴ ٨ × أحـ = ٦ × (٤ + أحـ)   ∴ ٨ أحـ = ٢٤ + ٦ أحـ

∴ ٢ أحـ = ٢٤   ∴ أحـ = ١٢ سم

∴ مقدار المحصلة : ح = ٢ نيوتن ، و يعمل اتجاهها فى اتجاه القوة ٨ نيوتن و تؤثر فى نقطة ∈ $\overleftarrow{ب أ}$ و تقع خارج $\overline{أب}$ و تبعد عن أ بمقدار ١٢ سم

(٨) قوتان متوازيتان و متضادتان في الاتجاه مقدارهما ٤ ، ٩ نيوتن تؤثران فى النقطتين أ ، ب حيث أب = ١٥ سم أوجد محصلتهما

الحل

نفرض $\overleftarrow{ى}$ متجه وحدة فى اتجاه القوة الكبرى

∴ $\overleftarrow{ق_1}$ = ٩ $\overleftarrow{ى}$ ، $\overleftarrow{ق_2}$ = − ٤ $\overleftarrow{ى}$

، $\overleftarrow{ح}$ = ٩ $\overleftarrow{ى}$ − ٤ $\overleftarrow{ى}$ = ٥ $\overleftarrow{ى}$

و بفرض أن : المحصلة تؤثر نقطة حـ ∈ $\overleftarrow{أب}$

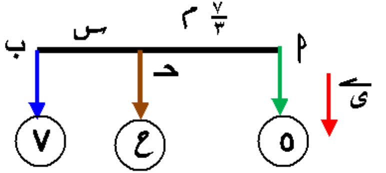
∴ ٤ × أحـ = ٩ × ب حـ   ∴ ٤ × أحـ = ٩ × (أحـ − ١٥)

∴ ٤ أحـ = ٩ أحـ − ١٣٥   ∴ ٥ أحـ = ١٣٥   ∴ أحـ = ٢٧ سم

∴ مقدار المحصلة : ح = ٥ نيوتن ، و يعمل اتجاهها فى اتجاه القوة ٩ نيوتن و تؤثر فى نقطة ∈ $\overleftarrow{أب}$ و تقع خارج $\overline{أب}$ و تبعد عن أ بمقدار ٢٧ سم

(٩) إذا كانت محصلة القوتان المتوازيتان ٧ $\overleftarrow{ى}$ ، ٥ $\overleftarrow{ى}$ نيوتن تؤثر فى نقطة تبعد ٢ $\frac{1}{3}$ متر عن خط عمل القوة الصغرى أوجد المسافة بين خطى عمل القوتين

الحل



∵ القوتان متحدا الاتجاه ،

و بفرض أن خط عمل المحصلة يبعد عن خط القوة الكبرى س متر

∴ ٥ × $\frac{7}{3}$ = ٧ × س   و منها : س = $\frac{5}{3}$ متر

و تكون المسافة بين القوتين = $\frac{7}{3}$ + $\frac{5}{3}$ = ٤ متر

(١٠) قوتان متوازيتان صغراهما ٣٠ نيوتن و تؤثر فى الطرف أ من قضيب خفيف أب و الكبرى تؤثر فى الطرف ب فإذا كان مقدار محصلتهما ١٠ نيوتن ، و يبعد خط عملها عن الطرف ب بمقدار ٩٠ سم ، فما طول القضيب

الحل

بفرض ى متجه وحدة فى اتجاه المحصلة
و مقدار القوة الكبرى = ق نيوتن
∵ مقدار المحصلة أقل من القوة الصغرى ،
∴ القوتان فى اتجاهين متضادين
∴ ١٠ ى = ق ى − ٣٠ ى
و منها : ق = ٤٠ نيوتن
∴ ٣٠ × أ حـ = ٤٠ × ب حـ
∴ ٣٠ × أ حـ = ٤٠ × ٩٠
∴ ٣٠ أ حـ = ٣٦٠٠
∴ أ حـ = ١٢٠
∴ أ ب = ٣٠ سم

(١١) أ ، ب ، حـ ، ء ، هـ نقط تقع على خط مستقيم واحد بحيث : أ ب = ٤ سم ، ب حـ = ٦ سم ، حـ ء = ٨ سم ، ء هـ = ١٠ سم أثرت خمس قوى مقاديرها ٦٠ ، ٣٠ ، ٥٠ ، ٨٠ ، ٤٠ ث كجم فى النقط أ ، حـ ، ء ، ب ، هـ على الترتيب و فى اتجاه عمودى على أهـ بحيث كانت القوى الثلاث الأولى متحدة الاتجاه و القوتان الاخريان فى الاتجاه المضاد ، عين محصلة المجموعة

الحل

نفرض ى متجه وحدة فى اتجاه القوى الثلاث الأولى
∴ ع = (٦٠ + ٣٠ + ٥٠ − ٨٠ − ٤٠) ى = ٢٠ ى
أى أن مقدار المحصلة ٢٠ ث كجم فى اتجاه القوى الثلاث الأولى

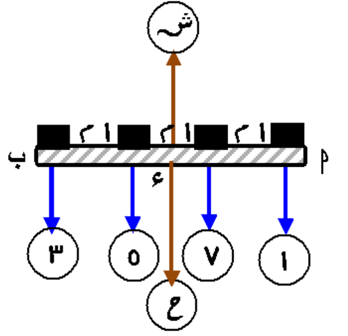
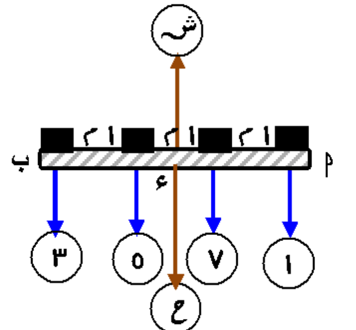
و بفرض أن : المحصلة تعمل فى نقطة م ∈ أهـ
∵ مجموع عزوم القوى حول نقطة أ = عزم المحصلة حول نقطة أ ،
∴ عزم المحصلة حول نقطة أ = ٨٠ × ٤ − ٣٠ × ١٠ − ٥٠ × ١٨ + ٤٠ × ٢٨
= ٢٤٠ ∴ المحصلة حول نقطة أ فى اتجاه عكس دوران عقارب الساعة
أى أن : م ∈ هـ أ ∴ ٢٠ × أ م = ٢٤٠ و منها : أ م = ١٢ سم
∴ ٢٤٠ خط عمل المحصلة يمر بنقطة م ∈ هـ أ ، م ∉ هـ أ ،
بحيث : أ م = ١٢ سم

(١٢) فى الشكل المقابل : وضعت أربعة أثقال مقدارها ١ ، ٧ ، ٥ ، ٣ ث كجم على قضيب خفيف كما بالشكل ، عين نقطة تعليق على القضيب بحيث يظل القضيب أفقياً

الحل

نفرض ى متجه وحدة رأسياً لأعلى
∴ ع = (١ + ٧ + ٥ + ٣) ى = ١٦ ى
∴ ع = ١٦ ث كجم
أى أن مقدار المحصلة ١٦ ث كجم و تؤثر لأسفل
بفرض أن : ع تؤثر عند نقطة ء على القضيب
∵ مجموع عزوم القوى حول نقطة أ ،
= عزم المحصلة حول نقطة أ
∴ عزم المحصلة حول نقطة أ = ٧ × ١ + ٥ × ٢ + ٣ × ٣ = ٢٦
∴ المحصلة تعمل حول نقطة أ فى اتجاه عكس دوران عقارب الساعة
∴ ء ∈ أب ∴ ٢٦ = ١٦ × أ ء ∴ أ ء = ١,٦٢٥ سم
أى أن : المحصلة تؤثر فى نقطة ء ∈ أب و تبعد ١,٦٢٥ سم عن نقطة أ

∵ الشد في الخيط (ش) الذي يعلق منه القضيب يساوي في المقدار محصلة القوى (ع) و يضادها في الاتجاه

∴ ش = ١٦ ث كجم و يؤثر في نقطة ء ∈ $\overline{\text{ﻫ ب}}$ و تبعد ١,٦٢٥ سم عن نقطة ﻫ كما بالشكل المقابل

أي : يجب أن يعلق القضيب من نقطة تبعد ١,٦٢٥ سم من طرفه ﻫ ليظل أفقياً

(١٣) قوتان متوازيتان و متحدا الاتجاه مقدارهما ٥ ، ٨ نيوتن تؤثران في النقطتين ﻫ ، ب حيث ﻫ ب = ٣٩ سم ، إذا اضيف للقوة الأولى قوة أخرى مقدارها ق نيوتن في نفس الاتجاه فإن المحصلة تتحرك ٨ وحدات أوجد ق

الحل

في الحالة الأولى : من الشكل المقابل نجد :

ع = ٥ + ٨ = ١٣ نيوتن

، ٥ × ﻫ ﺣ = ٨ × ب ﺣ

∴ ٥ × ﻫ ﺣ = ٨ × (٣٩ − ﻫ ﺣ)

∴ ٥ ﻫ ﺣ = ٣١٢ − ٨ ﻫ ﺣ

∴ ١٣ ﻫ ﺣ = ٣١٢ ∴ ﻫ ﺣ = ٢٤ سم

في الحالة الثانية : المحصلة تتحرك ٨ وحدات

∴ ﻫ ﺣ = ٢٤ − ٨ = ١٦ سم ، ب ﺣ = ٢٣ سم

∴ (٥ + ق) × ١٦ = ٨ × ٢٣

∴ ٨٠ + ١٦ ق = ١٨٤ و منها : ق = ٦,٥ نيوتن

(١٤) ﻫ ، ب ، ﺣ ثلاث نقط تقع على مستقيم أفقي بحيث : ﻫ ب = ١ متر ﻫ ﺣ = ٣ متر ، ب ∈ $\overline{\text{ﻫ ﺣ}}$ ، أثرت القوى ٢ ، $\frac{١}{٢}$ نيوتن رأسياً لأسفل في النقطتين ﻫ ، ﺣ على الترتيب ، كما أثرت قوة مقدارها ٤ نيوتن في النقطة ب رأسياً لأعلى ، أوجد مقدار و اتجاه المحصلة و بعد نقطة تأثيرها عن نقطة ﻫ

الحل

نفرض $\overleftarrow{ى}$ متجه وحدة رأسياً لأعلى

∵ $\overleftarrow{ع}$ = (٤ − $\frac{١}{٢}$ − ٢) $\overleftarrow{ى}$ = $\frac{٣}{٢}$ $\overleftarrow{ى}$

∴ ع = $\frac{٣}{٢}$ نيوتن

أي أن مقدار المحصلة $\frac{٣}{٢}$ نيوتن و تؤثر لأعلى

و بفرض أن : المحصلة تعمل في نقطة ء ∈ $\overleftrightarrow{\text{ﻫ ﺣ}}$

، ∵ مجموع عزوم القوى حول نقطة ﻫ

= عزم المحصلة حول نقطة ﻫ

∴ عزم المحصلة حول نقطة ﻫ =

− ٤ × ١ + $\frac{١}{٢}$ × ٣ = − $\frac{٥}{٢}$

∴ المحصلة تعمل حول نقطة ﻫ في اتجاه عكس دوران عقارب الساعة

∴ ء ∈ $\overline{\text{ﻫ ﺣ}}$ ∴ − $\frac{٣}{٢}$ × ﻫ ء = − $\frac{٥}{٢}$ و منها : ﻫ ء = $\frac{٥}{٣}$ م

أي أن : المحصلة تؤثر في نقطة ء ∈ $\overline{\text{ﻫ ﺣ}}$ و تبعد $\frac{٥}{٣}$ م عن نقطة ﻫ

٣ – ٢ اتزان مجموعة من القوى المتوازية المستوية

قاعدة :

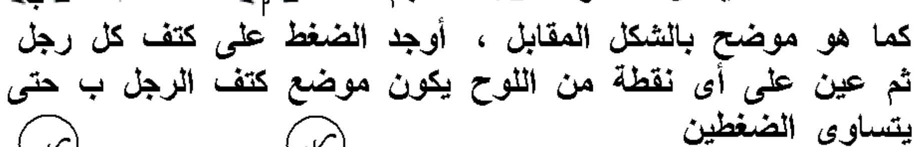
إذا أتزن جسم متماسك تحت تأثير مجموعة من القوى المتوازية المستوية فإن :

(١) مجموع القياسات الجبرية لهذه القوى (بالنسبة لمتجه وحدة يوازيها) يساوى صفراً (المحصلة = صفر)

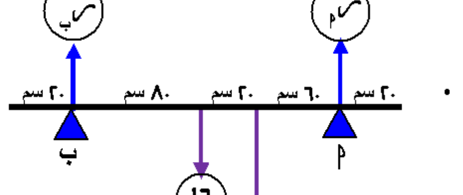
(٢) مجموع القياسات الجبرية لعزوم هذه القوى حول أى نقطة فى مستويها يساوى صفراً

إجابة حاول أن تحل (١) صفحة ٥٦

رجلان ﻡ ، ب يحملان لوح من الخشب طوله ٢ متر و وزنه ١٦ ث كجم يؤثر عند منتصفه يحمل صندوقاً ٢٤ ث كجم كما هو موضح بالشكل المقابل ، أوجد الضغط على كتف كل رجل ثم عين على أى نقطة من اللوح يكون موضع كتف الرجل ب حتى يتساوى الضغطين



الحل



أولاً : مجموع القياسات الجبرية للقوى = ٠

∴ $ر_{ﻡ}$ + $ر_{ب}$ − ٢٤ − ١٦ = ٠

∴ $ر_{ﻡ}$ + $ر_{ب}$ = ٤٠ (١)

، ∵ مجموع عزوم القوى حول نقطة ﻡ = ٠

∴ ٢٤ × ٦٠ + ١٦ × ٨٠ − $ر_{ب}$ × ١٦٠ = ٠ ∴ $ر_{ب}$ = ١٧ ث كجم

بالتعويض فى (١) ينتج : $ر_{ﻡ}$ = ٢٣ ث كجم

∴ $ض_{ﻡ}$ = ٢٣ ث كجم ، $ض_{ب}$ = ١٧ ث كجم

ثانياً : مجموع القياسات الجبرية للقوى = ٠

∴ ر + ر − ٢٤ − ١٦ = ٠

∴ ٢ ر = ٤٠ ∴ ر = ٢٠ ث كجم

، بفرض أن : الرجل ب يقف على بعد س سم من الرجل ﻡ

، ∵ مجموع عزوم القوى حول نقطة ﻡ = ٠

∴ ٢٤ × ٦٠ + ١٦ × ٨٠ − ر × (٨٠ + س) = ٠

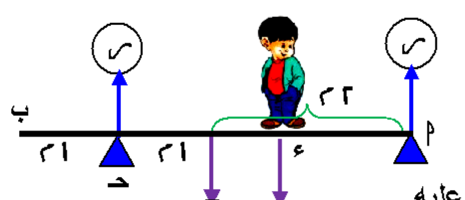
∴ ٢٤ × ٦٠ + ١٦ × ٨٠ − ٢٠ × س = ٠ و منها : س = ١٣٦ سم

أى أن : كتف الرجل ب يكون على بعد ١٣٦ سم من كتف الرجل ﻡ

إجابة حاول أن تحل (٢) صفحة ٥٦

ﻡب لوح خشبى منتظم كتلته ١٠ كجم و طوله ٤ أمتار يرتكز فى وضع على حاملين أحدهما عند ﻡ و الآخر عند نقطة تبعد ١ متر عن ب ، بين على أى بعد يقف على اللوح طفل وزنه ٥٠ ث كجم لكى يتساوى ردى الفعل على الحاملين

الحل



∵ اللوح منتظم

∴ وزنه ١٠ ث كجم يؤثر فى منتصفه

، رد الفعل عند كل حامل يساوى الضغط عليه

، مجموع القياسات الجبرية للقوى = ٠

∴ ر + ر − ١٠٠ − ٥٠ = ٠ ∴ ٢ ر = ٦٠ ∴ ر = ٣٠ ث كجم

، ∵ مجموع عزوم القوى حول نقطة ﻡ = ٠

∴ ٥٠ × ﻡء + ١٠ × ٢ − ٣٠ × ٣ = ٠ ∴ ٥٠ × ﻡء = ٧٠

∴ ﻡء = ١,٤ م

أى أن : الطفل يقف على بعد ١,٤ م من ﻡ لكى يتساوى ردى الفعل على الحاملين

إجابة حاول أن تحل (٢) صفحة ٥٦

يرتكز قضيب أب طوله ٩٠ سم و وزنه ٥٠ نيوتن و يؤثر فى نقطة منتصفه فى وضع أفقى على حاملين أحدهما عند الطرف أ و الآخر عند نقطة حـ تبعد ٣٠ سم عن ب و يحمل ثقل مقداره ٢٠ نيوتن عند نقطة تبعد ١٥ سم عن ب عين قيمة الضغط على كل حامل ، و أوجد أيضاً مقدار الثقل الذى يجب تعليقه من الطرف ب بحيث يصبح القضيب على وشك الدوران و ما هى قيمة الضغط على حـ عندئذ

الحل

أولاً : مجموع القياسات الجبرية للقوى = ٠

∴ $ر_{أ}$ + $ر_{ب}$ − ٥٠ − ٢٠ = ٠

∴ $ر_{أ}$ + $ر_{ب}$ = ٧٠ (١)

∵ مجموع عزوم القوى حول نقطة أ = ٠ ،

∴ ٥٠ × ٤٥ + ٢٠ × ٧٥ − $ر_{ب}$ × ٦٠ = ٠

∴ $ر_{ب}$ = ٦٢,٥ نيوتن بالتعويض فى (١) ينتج : $ر_{أ}$ = ٧,٥ نيوتن

∴ $ض_{أ}$ = ٧,٥ نيوتن ، $ض_{حـ}$ = = ٦٢,٥ نيوتن

ثانياً : عند تعليق ثقل و ليكن (و) من الطرف ب فإن القضيب يكون على وشك الدوران حول حـ

∴ $ر_{أ}$ = ٠

، مجموع القياسات الجبرية للقوى = ٠

∴ $ر_{ب}$ − ٥٠ − ٢٠ − و = ٠

∴ $ر_{ب}$ = ٧٠ + و (٢)

∵ مجموع عزوم القوى حول نقطة حـ = ٠ ،

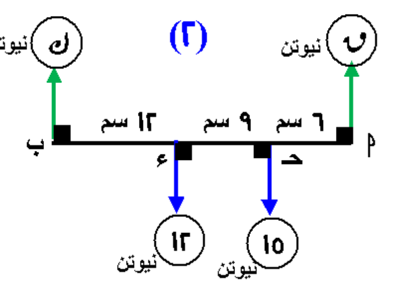
∴ ٢٠ × ١٥ + و × ٣٠ − ٥٠ × ١٥ = ٠ و منها : و = ١٥ نيوتن

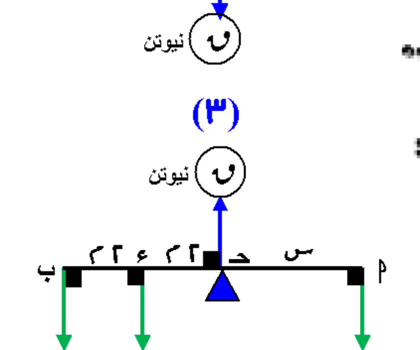
بالتعويض فى (٢) ينتج : $ر_{ب}$ = ٨٥ نيوتن ∴ $ض_{حـ}$ = = ٨٥ نيوتن

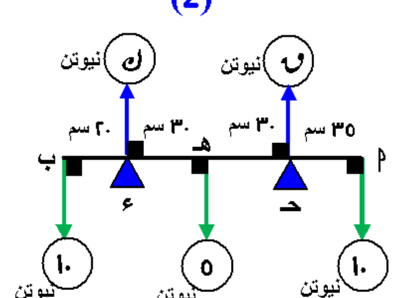
حل تمارين (٣ – ٢) صفحة ٥٨ بالكتاب المدرسى

فى كل من الأشكال الآتية : قضيب خفيف متزن أفقياً أوجد معيار كل من القوى ق ، ك ، البعد س

(١)







الحل

(١) ∵ القضيب متزن ∴ مجموع القياسات الجبرية للقوى = ٠

∴ ق − ٤ − ٧ = ٠ ∴ ق = ١١ نيوتن

، مجموع عزوم القوى حول نقطة حـ = ٠

∴ ٤ × س − ٧ × ١٦ = ٠ و منها : س = ٢٨ سم

(٢) ∵ القضيب متزن ∴ مجموع القياسات الجبرية للقوى = ٠

∴ ق + ك − ١٥ − ١٢ = ٠ ∴ ق + ك = ٢٧ (١)

، مجموع عزوم القوى حول نقطة أ = ٠

∴ ١٥ × ٦ + ١٢ × ١٥ − ل × ٢٧ = ٠　　و منها : ل = ١٠ نيوتن

و بالتعويض فى (١) ينتج : ى = ١٧ نيوتن

(٣) ∵ القضيب متزن　　∴ مجموع القياسات الجبرية للقوى = ٠

∴ ى − ٧ − ٦ − ٤ = ٠　　∴ ى = ١٧ نيوتن

، مجموع عزوم القوى حول نقطة حـ = ٠

∴ ٤ × س − ٦ × ٢ − ٤ × ٤ = ٠　　و منها : س = ٤ م

(٤) ∵ القضيب متزن　　∴ مجموع القياسات الجبرية للقوى = ٠

∴ ى + ل − ١٠ − ٥ − ١٠ = ٠　　∴ ى + ل = ٢٥　(١)

، مجموع عزوم القوى حول نقطة حـ = ٠

∴ ٥ × ٣٠ + ١٠ × ٢٠ − ١٠ × ٣٥ − ل × ٦٠ = ٠

و منها : ل = ١٠ نيوتن　　و بالتعويض فى (١) ينتج : ى = ١٥ نيوتن

أجب عما يأتى :

(٥) قضيب منتظم طوله ٢ متر و كتلته ٧٥ كجم يرتكز فى وضع أفقى على حاملين عند طرفيه ، علق ثقل مقداره ١٥ ث كجم من نقطة على القضيب على بعد ٥٠ سم من أحد طرفيه أوجد رد الفعل عند كل حامل

الحل

∵ القضيب متزن

∴ مجموع القياسات الجبرية للقوى = ٠

∴ ر$_{م}$ + ر$_{ب}$ − ٩٠ = ٠

∴ ر$_{م}$ + ر$_{ب}$ = ٩٠　(١)

، مجموع عزوم القوى حول نقطة م = ٠

∴ ١٥ × ٥٠ + ٧٥ × ١٠٠ − ر$_{ب}$ × ٢٠٠ = ٠

و منها : ر$_{ب}$ = ٤١,٧٥ نيوتن　　و بالتعويض فى (١) ينتج :

ر$_{م}$ = ٤٨,٢٥ نيوتن　　∴ ض$_{م}$ = ٤٨,٢٥ نيوتن ، ض$_{ب}$ = ٤١,٧٥ نيوتن

(٦) قضيب منتظم طوله ٣ متر و كتلته ٤ كجم و يحمل جسمين كتلتهما ٥ كجم ، ١,٥ كجم عند طرفيه ، أوجد موضع نقطة تعليق على القضيب لكى يتزن القضيب فى وضع أفقى

الحل

نفرض أن نقطة التعليق على القضيب هى حـ تقع على بعد س من م ، و الشد فى خيط التعليق = ش

∵ القضيب متزن

∴ مجموع القياسات الجبرية للقوى = ٠

∴ ش − ٥ − ٤ − ١,٥ = ٠

∴ ش = ١٠,٥　(١)

، مجموع عزوم القوى حول نقطة م = ٠

∴ ٤ × ١٥٠ + ١,٥ × ٣٠٠ − ش × س = ٠ ، بالتعويض من (١) :

∴ ١٠,٥ س = ٦٠٠ + ٤٥٠　　و منها : س = ١٠٠ سم

أى أن : نقطة اتعليق القضيب ليتزن أفقياً تبعد عن الطرف م بمقدار ١٠٠ سم

(٧) م ب قضيب غير منتظم طوله ١٢٠ سم ، إذا ثبت عند طرفه ب ثقل قدره ١ نيوتن و علق من طرفه م ثقل قدره ١٦ نيوتن فإن القضيب يتزن فى هذه الحالة عند نقطة تبعد ٣٠ سم من م ، و إذا نقص الثقل الموجود عند م و صار ٨ نيوتن فإن القضيب يتزن عند نقطة تبعد ٤٠ سم من م ، أوجد وزن القضيب و بعد نقطة تأثير وزنه عن م

الحل

بفرض أن :

وزن القضيب = و نيوتن ، يؤثر فى نقطة ء

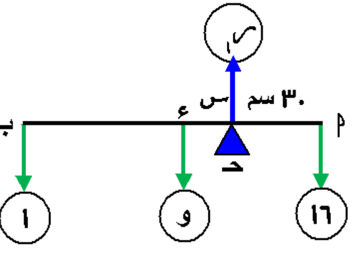
فى الحالة الأولى : نفرض أن القضيب يتزن عند نقطة حـ ، نقطة ء تبعد عن نقطة حـ مسافة س سم أى أن : حـ ء = س سم

، ∵ أحـ = ٣٠ سم ∴ ب حـ = ٩٠ سم

∵ القضيب متزن

∴ مجموع عزوم القوى حول نقطة حـ = ٠

∴ ١ × ٩٠ + و × س − ١٦ × ٣٠ = ٠ ∴ و س = ٣٩٠ (١)



فى الحالة الثانية : نفرض أن القضيب يتزن عند نقطة هـ ، وزن القضيب يؤثر فى نقطة ء

، ∵ أحـ = ٤٠ سم ∴ ب حـ = ٨٠ سم

، ء هـ = (س − ١٠) سم

، ∵ القضيب متزن

∴ مجموع عزوم القوى حول نقطة هـ = ٠

∴ ١ × ٨٠ + و × (س − ١٠) − ٨ × ٤٠ = ٠

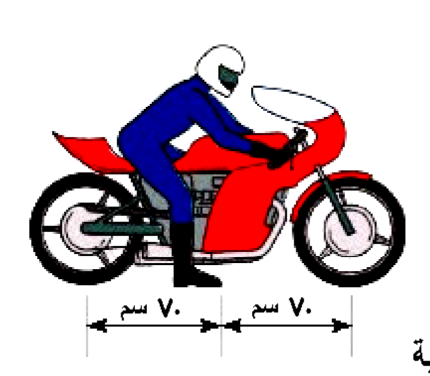
∴ و س − ١٠ و = ٢٤٠ ، بالتعويض من (١) ينتج :

٣٩٠ − ١٠ و = ٢٤٠ ∴ ١٠ و = ١٥٠ ∴ و = ١٥ نيوتن

، بالتعويض فى (١) ينتج : س = ٢٦ سم

أى أن : وزن القضيب ١٥ نيوتن و يؤثر فى نقطة تبعد عن أ مسافة ٥٦ سم

(٨) الشكل المقابل يوضح راكب دراجة نارية كتلتها ٢٠٠ كجم و وزنها يؤثر فى الخط الرأسى المار بمنتصف المسافة بين العجلتين و كانت كتلة الراكب ٨٤ كجم و وزنه يؤثر فى الخط الرأسى الذى يبعد ١ متر خلف العجلة الأمامية



أوجد رد فعل الأرض على العجلتين فى كل الحالات الآتية :

(أ) الدراجة بدون راكب (ب) الدراجة مع وجود الراكب

الحل

(أ) الدراجة بدون راكب من شروط الاتزان :

∵ مجموع القياسات الجبرية للقوى = ٠

∴ $ر_1$ + $ر_2$ − ٢٠٠ = ٠

∴ $ر_1$ + $ر_2$ = ٢٠٠ (١)

، مجموع عزوم القوى حول نقطة ء = ٠

∴ $ر_1$ × ٧٠ − $ر_2$ × ٧٠ = ٠ و منها : $ر_1$ = $ر_2$ (٢)

، من (١) ، (٢) ينتج : $ر_1$ = $ر_2$ = ١٠٠ ث كجم

(ب) الدراجة مع وجود الراكب

من شروط الاتزان :

∵ مجموع القياسات الجبرية للقوى = ٠

∴ $ر_3$ + $ر_4$ − ٢٠٠ − ٨٤ = ٠

∴ $ر_3$ + $ر_4$ = ٢٨٤ (٣)

، مجموع عزوم القوى حول نقطة حـ = ٠

∴ ٢٠٠ × ٧٠ + ٨٤ × ١٠٠ − $ر_4$ × ١٤٠ = ٠

و منها : $ر_4$ = ١٦٠ ث كجم ، من (٣) : $ر_3$ = ١٢٤ ث كجم

(٩) يرتكز قضيب $\overline{أب}$ طوله ٦٠ سم و وزنه ٤٠٠ ث جم يؤثر عند نقطة منتصفه على وتد يبعد ٢٠ سم من أ حفظ القضيب أفقياً فى حالة اتزان بواسطة خيط خفيف رأسى يتصل بطرفه ب أوجد :

(أ) مقدار كل من الشد فى الخيط و رد فعل الوتد

(ب) مقدار الثقل الذى يلزم تعليقه من أ ليجعل الشد فى الخيط على وشك أن ينعدم

الحل

(أ) ∵ القضيب متزن

∴ مجموع القياسات الجبرية للقوى = ٠

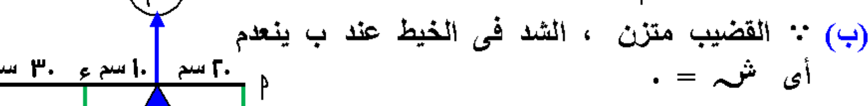
∴ $ر_1$ + ش − ٤٠٠ = ٠

∴ $ر_1$ + ش = ٠   (١)

، مجموع عزوم القوى حول نقطة حـ = ٠

∴ ٤٠٠ × ١٠ − ش × ٤٠ = ٠   ∴ ش = ١٠٠ ث جم

، من (١) : $ر_1$ = ٣٠٠ ث جم



(ب) ∵ القضيب متزن ، الشد فى الخيط عند ب ينعدم

أى ش = ٠

∴ مجموع عزوم القوى حول نقطة حـ = ٠

∴ ٤٠٠ × ١٠ − و × ٢٠ = ٠

∴ و = ٢٠٠ ث جم

(١٠) قضيب منتظم أ ب طوله ٦٠ سم و وزنه ١٠ ث جم و يؤثر عند منتصفه معلق فى وضع أفقى بواسطة خيطين رأسيين أحدهما مربوط فى نقطة حـ حيث أحـ = س سم ، علق ثقل قدره ١٢ ث جم فى نقطة ء حيث أ ء = ٢٥ سم ، فإذا كان أقصى شد يتحمله كل خيط هو ١٥ ث جم فأوجد القيم التى تقع بينها س و أوجد أيضاً أكبر و أقل قيمة للشد فى كل من الخيطين

الحل

من شروط الاتزان :

∵ مجموع القياسات الجبرية للقوى = ٠

∴ $ش_1$ + $ش_2$ − ١٢ − ١٠ = ٠

∴ $ش_1$ + $ش_2$ = ٢٢   (١)

، مجموع عزوم القوى حول نقطة أ = ٠

∴ ١٢ × ٢٥ + ١٠ × ٣٠ − $ش_2$ × س = ٠   ∴ $ش_2$ × س = ٦٠٠ (٢)

، ∵ طول القضيب = ٦٠ سم   ∴ أكبر قيمة لـ س = ٦٠ سم

، عندما : س = ٦٠ سم ∴ من (٢) : $ش_2$ = ١٠ ، من (١) : $ش_1$ = ١٢

، ∵ أقصى شد يتحمله كل خيط هو ١٥ ث جم

∴ عندما : $ش_2$ = ١٥ فإن من (١) : $ش_1$ = ٧ ، من (٢) : س = ٤٠

∴ القيم التى تقع بينها س هى : ٤٠ سم ، ٦٠ سم

، أقل قيمة للشد عند أ هى : ٧ ث جم ، أكبر قيمة له هى : ١٢ ث جم

، أقل قيمة للشد عند حـ هى : ١٠ ث جم ، أكبر قيمة له هى : ١٥ ث جم

(١١) ترتكز مسطرة خفيفة $\overline{أب}$ مقيسة بالسنتيمتر أفقياً على حاملين عند النقطتين حـ ، ء بحيث حـ ∈ $\overline{أء}$ ، ٢ أحـ = ٢ ب ء = حـ ء علق ثقل مقداره (و) من النقطة م على المسطرة فوجد أنها تكون على وشك الانقلاب إذا علق من الطرف (أ) ثقل مقداره ١٠ نيوتن أو إذا علق من الطرف (ب) ثقل مقداره ٦ نيوتن أوجد مقدار (و) و أثبت أن $\frac{أم}{مب} = \frac{9}{7}$

الحل

بفرض أن : أحـ = ب ء = س سم

∴ حـ ء = ٢ س سم ، م حـ = ل سم

∴ ب ء = (٢ س − ل) سم

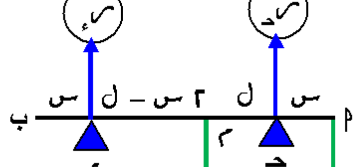
فى الحالة الأولى :

عند تعليق ثقل من الطرف أ

تكون المسطرة على وشك الانقلاب حول حـ

∴ $ر_ء$ = ٠ ، من شروط الاتزان :

مجموع عزوم القوى حول نقطة حـ = ٠



∴ ١٠ × س − و × ل = ٠ و منها : و ل = ١٠ س (١)

فى الحالة الأولى :

عند تعليق ثقل من الطرف ب

تكون المسطرة على وشك الانقلاب حول ء

∴ ر حـ = ٠ ، من شروط الاتزان :

مجموع عزوم القوى حول نقطة ء = ٠ .

و × (٢ س − ل) − ٦ × س = ٠ .

∴ ٢ و س − و ل = ٦ س ، بالتعويض من (١) ينتج :

٢ و س − ١٠ س = ٦ س و منها : و = ٨ نيوتن

، بالتعويض ف (١) ينتج : ٨ ل = ١٠ س ∴ ل = $\frac{٥}{٤}$ س

∴ أ م = س + ل = س + $\frac{٥}{٤}$ س = $\frac{٩}{٤}$ س سم

، ب م = س + (٢ س − ل) = ٣ س − ل = ٣ س − $\frac{٥}{٤}$ س

= $\frac{٧}{٤}$ س سم ∴ $\frac{أ م}{ب م}$ = $\frac{٩}{٧}$

(١٢) يحمل رجلان أ ، ب جسماً كتلته ٩٠ كجم معلق من قضيب معدنى متين و خفيف ، فإذا كانت المسافة بين الرجلين ٦٠ سم و كانت نقطة تعليق الجسم تبعد ٢٠ سم من أ ، فما مقدار ما يتحمله كل رجل من هذا الثقل ؟

و إذا كان الرجل ب لا يمكنه أن يتحمل أكثر من ٥٠ ث كجم فعين أكبر مسافة من أ يمكن تعليق الثقل عندها حتى يتمكن الرجل ب من الاستمرار فى حمل القضيب

الحل

فى الحالة الأولى : من شروط الاتزان :

∵ مجموع القياسات الجبرية للقوى = ٠ .

∴ ر١ + ر٢ − ٩٠ = ٠ ∴ ر١ + ر٢ = ٩٠ (١)

، مجموع عزوم القوى حول نقطة أ = ٠ ∴ ٩٠ × ٢٠ − ر٢ × ٦٠ = ٠

∴ ر٢ = ٣٠ ث كجم ، من (١) : ر١ = ٦٠ ث كجم

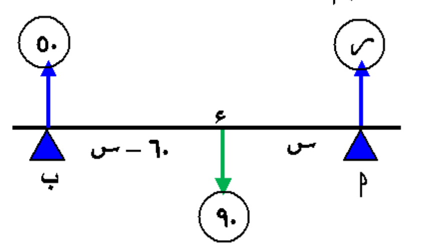
أى أن : ما يتحمله الرجل أ من الثقل هو ٦٠ ث كجم

، ما يتحمله الرجل ب من الثقل هو ٣٠ ث كجم

فى الحالة الثانية :

عندما يحمل الرجل ب : ٥٠ ث كجم

نفرض أن الثقل يكون على بعد س سم من الرجل أ



من شروط الاتزان :

∵ مجموع القياسات الجبرية للقوى = ٠ .

∴ ر + ٥٠ − ٩٠ = ٠ ∴ ر = ٤٠ ث كجم (٢)

، مجموع عزوم القوى حول نقطة أ = ٠ .

∴ ٩٠ × س − ٥٠ × ٦٠ = ٠ و منها : س = ٣٣ $\frac{١}{٣}$ سم

أى أن : أكبر مسافة من أ يمكن تعليق الثقل عندها حتى يتمكن الرجل ب من الاستمرار فى حمل القضيب هى ٣٣,٣ سم

(١٣) تؤثر القوى المستوية املتزنة و المتوازية ق١ ، ق٢ ، ق٣ ، ق٤ فى النقط أ (٢ ، −١) ، ب (−٤ ، −٣) ، حـ (٣ ، ٥) ، ء (−١ ، ٠) على الترتيب فإذا كانت ق١ = ٣ س + ٤ ص ، || ق٢ || = ٢٠ نيوتن فى نفس اتجاه ق١ أوجد كلاً من : ق٣ ، ق٤ إذا كانت تعملان فى اتجاه مضاد لاتجاه ق١

الحل

∵ ق١ // ق٢ ∴ ق٢ = ل ق١

∴ $\|\vec{ق}_{٢}\| = \|ك\,\vec{ق}_{١}\| = |ك| \times \|\vec{ق}_{١}\|$ (١)

، ∵ $\vec{ق}_{١} = ٣\,\vec{س} + ٤\,\vec{ص}$ ∴ $\|\vec{ق}_{١}\| = \sqrt{٩ + ١٦} = ٥$

، ∵ $\|\vec{ق}_{٢}\| = ٢٠$ ∴ من (١) : $٢٠ = |ك| \times ٥$

∴ $|ك| = ٤$ ∴ $ك = \pm ٤$

، ∵ $\vec{ق}_{١}$ فى نفس اتجاه $\vec{ق}_{٢}$ ∴ $ك = ٤$

∴ $\vec{ق}_{٢} = ٤\,\vec{ق}_{١} = ١٢\,\vec{س} + ١٦\,\vec{ص}$

، ∵ $\vec{ق}_{٣} \parallel \vec{ق}_{١}$ ∴ $\vec{ق}_{٣} = م\,\vec{ق}_{١} = ٣م\,\vec{س} + ٤م\,\vec{ص}$

، ∵ القوى متزنة ∴ مجموع عزوم القوى حول نقطة ء = ٠ .

∴ $\vec{ءأ} \times \vec{ق}_{١} + \vec{ءب} \times \vec{ق}_{٢} + \vec{ءحـ} \times \vec{ق}_{٣} = \vec{٠}$

∴ $[(٢ ، -١) - (-١ ، ٠)] \times (٣ ، ٤) +$

$[(-٤ ، -٣) - (-١ ، ٠)] \times (١٢ ، ١٦) +$

$[(٣ ، ٥) - (-١ ، ٠)] \times (٣م ، ٤م) = \vec{٠}$

∴ $(٣ ، -١) \times (٣ ، ٤) + (-٣ ، -٣) \times (١٢ ، ١٦) +$

$(٤ ، ٥) \times (٣م ، ٤م) = \vec{٠}$

∴ $(١٥ - ١٢ + م)\,\vec{ع} = \vec{٠}$ و منها : $م = -٣$

∴ $\vec{ق}_{٣} = -٩\,\vec{س} - ١٢\,\vec{ص}$

، ∵ القوى متزنة ∴ $\vec{ح} = \vec{٠}$

∴ $\vec{ق}_{١} + \vec{ق}_{٢} + \vec{ق}_{٣} + \vec{ق}_{٤} = \vec{٠}$

∴ $\vec{ق}_{٤} = -(\vec{ق}_{١} + \vec{ق}_{٢} + \vec{ق}_{٣})$

$= -[(٣ + ١٢ - ٩)\,\vec{س} + (٤ + ١٦ - ١٢)\,\vec{ص}]$

$= -٦\,\vec{س} - ٨\,\vec{ص}$

حل تمارين عامة صفحة ٦١ بالكتاب المدرسى

أكمل :

(١) قوتان متوازيتان و فى اتجاهين متضادين مقدارهما ١٠ ، ١٥ نيوتن تؤثران فى أ ، ب على الترتيب حيث أ ب = ٣٥ سم فإن : المحصلة تؤثر فى نقطة حـ حيث أ حـ = ...

(٢) مجموع عزوم عدة قوى متوازية و مستوية حول نقطة يساوى ....

(٣) قوتان متوازيتان و فى اتجاهين متضادين مقدارهما ق ، ٣ ق نيوتن و تؤثران فى أ ، ب على الترتيب حيث أ ب = ٣٩ سم فإن : المحصلة تؤثر فى نقطة حـ حيث أ حـ = ...

الحل

(١) نفرض $\vec{ى}$ متجه وحدة فى اتجاه القوة الكبرى

∴ من الشكل المقابل :

١٥ × ب حـ = ١٠ × أ حـ

∴ ١٥ × ب حـ = ١٠ × (٣٥ + ب حـ)

∴ ١٥ ب حـ = ٣٥٠ + ١٠ ب حـ

∴ ٥ ب حـ = ٣٥٠ ∴ ب حـ = ٧٠ سم ∴ أ حـ = ١٠٥ سم

(٢) عزم المحصلة حول نفس النقطة

(٣) نفرض $\vec{ى}$ متجه وحدة فى اتجاه القوتين

∴ من الشكل المقابل :

٢ ق × ب حـ = ق × أ حـ

∴ ٢ ب حـ = ٣٩ − ب حـ

∴ ٣ ب حـ = ٣٩

∴ ب حـ = ١٣ سم ∴ أ حـ = ٢٦ سم

أجب عما يأتى :

(٤) قوتان متوازيتان مقدار محصلتهما ٢٥٠ نيوتن و مقدار إحدى القوتين ١٥٠ نيوتن و تعمل على بعد ٤٠ سم من المحصلة ، أوجد القوة الثانية و البعد بين خطى عمل القوتين إذا كانت القوة المعلومة و المحصلة تعملان : أولاً : فى اتجاه واحد ثانياً : فى اتجاهين متضادين

الحل

نفرض ى متجه وحدة فى اتجاه المحصلة

∴ ح = ٢٥٠ ى ، ق١ = ١٥٠ ى

أولاً : ح ، ق١ فى اتجاه واحد

∵ ح = ق١ + ق٢ ∴ ٢٥٠ ى = ١٥٠ ى + ق٢ ى

∴ ق٢ ى = ١٠٠ ى

أى أن : ق٢ مقدارها ١٥٠ نيوتن و اتجاهها نفس اتجاه المحصلة

∵ مجموع عزوم القوى حول نقطة حـ = عزم المحصلة حول نقطة حـ = ٠

∴ ١٠٠ × ب حـ − ١٥٠ × ٤٠ = ٠ و منها : ب حـ = ٦٠ سم

∴ ا ب = ٤٠ − ٦٠ = ١٠٠ سم أى أن البعد القوتين = ١٠٠ سم

ثانياً : ح ، ق١ فى اتجاهين متضادين

∵ ح = ق١ + ق٢

∴ ٢٥٠ ى = − ١٥٠ ى + ق٢ ى

∴ ق٢ ى = ٤٠٠ ى

أى أن : ق٢ مقدارها ٤٠٠ نيوتن و اتجاهها نفس اتجاه المحصلة

∵ مجموع عزوم القوى حول نقطة حـ = عزم المحصلة حول نقطة حـ = ٠

∴ ١٥٠ × ٤٠ − ٤٠٠ × ب حـ = ٠ و منها : ب حـ = ١٥ سم

∴ ا ب = ٤٠ − ١٥ = ٢٢ سم أى أن البعد القوتين = ٢٥ سم

(٥) ا ، ب ، حـ ، ء أربع نقط تقع على خط مستقيم واحد بحيث : ا ب = ٣٢ سم ، ب حـ = ٤٠ سم ، حـ ء = ٨ سم أثرت القوتان المتوازيتان ٨ ، ١٠ نيوتن فى ا ، حـ على الترتيب و أثرت القوتان ٧ ، ٣ نيوتن فى ب ، ء فى اتجاه مضاد للقوتين عند ا ، حـ عين محصلة هذه المجموعة و بعد نقطة تأثيرها عن ا

الحل

نفرض ى متجه وحدة فى اتجاه القوتين عند ا ، حـ

∴ ح = (٨ + ١٠ − ٧ − ٣) ى

= ٨ ى

أى أن مقدار المحصلة ٨ نيوتن فى اتجاه القوتين عند ا ، حـ

و بفرض أن : المحصلة تعمل فى نقطة م ∈ ا ء

، ∵ مجموع عزوم القوى حول نقطة ا = عزم المحصلة حول نقطة ا

∴ ٧ × ٣٢ + ٣ × ٨٠ − ١٠ × ٧٢ = − ٨ × ا م

∴ ٤٦٤ = ٨ × ا م ∴ ا م = ٣٢ سم ∴ م تنطبق على ب

(٦) وضعت الأوزان ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ث كجم على قضيب خفيف بحيث تبعد عن طرفيه ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ سم أوجد بعد نقطة تعليق القضيب

الحل

∵ القضيب متزن

∴ مجموع القياسات الجبرية للقوى = ٠

∴ ش − ٢ − ٣ − ٤ − ٥ = ٠

∴ ش = ١٤ ث كجم

بفرض أن : ش يؤثر عند نقطة ء على القضيب

، مجموع عزوم القوى حول نقطة أ = ٠ .

∴ ٢ × ٢ + ٣ × ٣ + ٤ × ٥ + ٥ × ٥ − ش × أ ء = ٠ .

∴ ٥٤ = ١٤ × أ ء   ∴ أ ء = ٣,٨٥٧ (٣ $\frac{٦}{٧}$) سم

أى يجب أن يعلق القضيب من نقطة تبعد ٣,٨٥٧ سم من طرفه أ ليظل أفقياً

(٧) أ ب قضيب منتظم طوله ١٠٠ سم و وزنه ١٠ نيوتن يؤثر فى منتصفه يرتكز أفقياً على حاملين أحدهما عند أ و الآخر عند نقطة على بعد ٢٥ سم من ب أوجد الثقل الذى يجب تعليقه من الطرف ب لتكون قيمة رد الفعل للحامل القريب من الطرف ب مساوياً ستة أمثال رد فعل الحامل عند أ ثم أوجد رد فعل كل حامل فى هذه الحالة

الحل

∵ القضيب متزن

∴ مجموع القياسات الجبرية للقوى = ٠

∴ ر + ٦ ر − ١٠ − و = ٠ .

∴ و = ٧ ر − ١٠   (١)

، مجموع عزوم القوى حول نقطة ب = ٠ .

∴ ر × ١٠٠ + ٦ ر × ٢٥ − ١٠ × ٥٠ = ٠   و منها : ر = ٢ نيوتن

من (١) ينتج : و = ٤ نيوتن أى أن : الثقل المعلق من الطرف ب = ٤ نيوتن

، رد الفعل عند الحامل عند أ = ٢ نيوتن ، رد الفعل عند الحامل حـ = ١٢ نيوتن

(٨) أ ب قضيب غير منتظم طوله ٨٠ سم و وزنه ٢٠ ث كجم يرتكز فى وضع أفقى على حاملين عند حـ ، ء حيث أ حـ = ب ء = ١٠ سم ، علق من أ ثقل قدره ٤٠ ث كجم فأصبح القضيب على وشك الدوران حول حـ أوجد بعد نقطة تأثير وزن القضيب عن أ ثم أوجد أكبر ثقل يمكن تعليقه من ب من دون أن يختل التوازن مع رفع الثقل المعلق من أ

الحل

فى الحالة الأولى :

عند تعليق ثقل من الطرف أ

يكون القضيب على وشك الدوران حول حـ

∴ ر٢ = ٠ ، من شروط الاتزان :

مجموع عزوم القوى حول نقطة حـ = ٠ .

∴ ٢٠ × س − ٤٠ × ١٠ = ٠   و منها : س = ٢٠ سم

أى أن : نقطة تأثير وزن القضيب تكون على بعد ٣٠ سم من الطرف أ

فى الحالة الثانية :

نفرض أن أكبر ثقل يمكن تعليقه من الطرف ب هو : و

∵ القضيب يكون على وشك الدوران حول ء   ∴ ر٣ = ٠

، من شروط الاتزان :

مجموع عزوم القوى حول نقطة ء = ٠ .

∴ ٢٠ × ٤٠ − و × ١٠ = ٠   و منها : و = ٨٠ ث كجم

أى أن : أكبر ثقل يمكن تعليقه من الطرف هو ٨٠ ث كجم

(٩) أ ب حـ ء قضيب غير منتظم يرتكز فى وضع أفقى على حاملين أملسين عند ب ، حـ بحيث أ ب = ٦ سم ، حـ ء = ٧ سم و نقطة تأثير وزن القضيب تقسمه بنسبة ٢ : ٣ من جهة الطرف أ وجد أنه لو علق من الطرف أ ثقل قدره ١٢٠ ث جم أو من الطرف ء ثقل قدره ١٨٠ ث جم كان القضيب على وشك الدوران أوجد وزن القضيب و البعد بين الحاملين

الحل

نفرض أن هـ هى نقطة تعليق وزن القضيب

∴ هـ تقسم القضيب بنسبة ٢ : ٣ من جهة الطرف أ

∴ نفرض أن : أ هـ = ٢ س

، ء هـ = ٣ س فيكون :

ب هـ = ٢ س − ٦ ، حـ هـ = ٣ س − ٧

فى الحالة الأولى : عند تعليق ثقل مقداره ١٢٠ ث جم من الطرف أ

يكون القضيب على وشك الدوران حول ب ∴ $ر_{٢}$ = ٠

، من شروط الاتزان : مجموع عزوم القوى حول نقطة ب = ٠

∴ و × (٢ س − ٦) − ١٢٠ × ٦ = ٠

∴ ٢ و س − ٦ و = ٧٢٠ (١)

فى الحالة الثانية :

عند تعليق ثقل مقداره ١٨٠ ث جم من الطرف ء

يكون القضيب على وشك الدوران حول حـ

∴ $ر_{٣}$ = ٠

، من شروط الاتزان : مجموع عزوم القوى حول نقطة حـ = ٠

∴ ١٨٠ × ٧ − و × (٣ س − ٧) = ٠

∴ ٣ و س − ٧ و = ١٢٦٠ (٢)

بضرب (٢) × ٢ ، ضرب (١) × (٣) و جمع المعادلتين ينتج :

٤ و = ٣٦٠ ∴ و = ٩٠ ث جم

، بالتعويض فى (١) ينتج : ١٨٠ س − ٥٤٠ = ٧٢٠ ∴ س = ٧ سم

∴ ب هـ = ٢ س − ٦ = ٨ سم ، حـ هـ = ٣ س − ٧ = ١٤ سم

∴ البعد بين الحاملين = ٨ + ١٤ = ٢٢ سم

(١٠) أ ب قضيب منتظم طوله ١٢٠ سم و وزنه ٦٠ نيوتن يؤثر عند نقطة منتصفه يرتكز فى وضع أفقى على حامل عند طرفه ب و يحفظ فى حالة توازن بواسطة خيط رأسى مثبت من نقطة حـ على بعد ٤٠ سم من أ ، و يحمل ثقلاً مقداره ٢٠ نيوتن عند نقطة تبعد ٢٠ سم من أ ، عين قيمة كل من الشد فى الخيط و الضغط على الحامل ، و ما هو مقدار الثقل الذى يجب تعليقه من الطرف أ حتى يصبح على وشك الانفصال عن الحامل ، و ما قيمة الشد فى الخيط عندئذ

الحل

فى الحالة الأولى : ∵ القضيب متزن

∴ مجموع القياسات الجبرية للقوى = ٠

∴ $ش_{١}$ + $ر_{١}$ − ٢٠ − ٦٠ = ٠

∴ $ش_{١}$ + $ر_{١}$ = ٨٠ (١)

، مجموع عزوم القوى حول نقطة حـ = ٠

∴ ٦٠ × ٢٠ − ٢٠ × ٢٠ − $ر_{١}$ × ٨٠ = ٠ و منها : $ر_{١}$ = ١٠ نيوتن

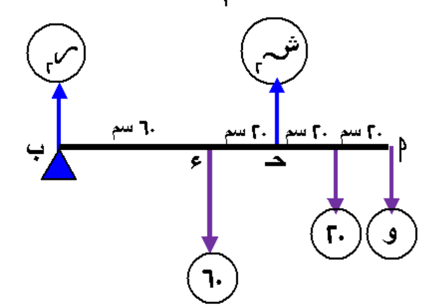
من (١) ينتج : $ش_{١}$ = ٧٠ نيوتن

فى الحالة الثانية :

نفرض الثقل المعلق من الطرف أ هو : و

∵ القضيب على وشك الانفصال عن الحامل

∴ $ر_{٢}$ = ٠ ، ∵ القضيب متزن



∴ $ش_{٢}$ − ٢٠ − ٦٠ − و = ٠

∴ $ش_{٢}$ = ٨٠ + و (٢)

، مجموع عزوم القوى حول نقطة حـ = ٠

∴ ٦٠ × ٢٠ − ٢٠ × ٢٠ − و × ٢٠ = ٠ و منها : و = ٢٠ نيوتن

من (٢) ينتج : $ش_{٢}$ = ١٠٠ نيوتن

اجابة أسئلة الاختبارات الخاصة بالوحدة

الاختبار الأول

السؤال الأول : أختر الاجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة

(٢) الشكل المقابل يمثل قضيب فى حالة اتزان فإن : ق = ...

٢٠ نيوتن　ق　١٢ نيوتن
٤م　٢م　٢م

(أ) ٢٨ نيوتن　(ب) ١٦ نيوتن　(حـ) ٢ نيوتن　(ء) ٤ نيوتن

الحل

∵ القضيب متزن

∴ مجموع القياسات الجبرية لعزوم القوى حول نقطة تأثير الحامل = صفر

∴ ٢٠ × ٤ − ١٢ × ٤ − ق × ٢ = صفر　و منها : ق = ١٦ نيوتن

السؤال الثالث :

(أ) قوتان متوازيتان و فى نفس الاتجاه مقدارهما ١٠ ، ١٥ نيوتن تؤثران فى النقطتين أ ، ب حيث أ ب = ٧٥ سم أوجد محصلة القوتين

٧٥ سم　أ　ب　حـ　ى　١٠　ح　١٥

الحل

نفرض ى متجه وحدة فى اتجاه القوتين

∴ ق١ = ١٠ ى　،　ق٢ = ١٥ ى

مقدار المحصلة :

ح = ق١ + ق٢ = ١٠ ى + ١٥ ى = ٢٥ ى

اتجاه المحصلة : نفرض أن المحصلة تؤثر فى نقطة حـ ∈ أ ب

∴ ١٠ × أ حـ = ١٥ × ب حـ　∴ ١٠ × أ حـ = ١٥ × (٧٥ − أ حـ)

∴ ١٠ أ حـ = ١١٢٥ − ١٥ أ حـ

∴ ٢٥ أ حـ = ١١٢٥　∴ أ حـ = ٤٥ سم

أى أن : مقدار المحصلة يساوى ٢٥ نيوتن و يعمل اتجاهها فى نفس اتجاه القوتين و تؤثر فى نقطة تبعد عن أ بمقدار ٤٥ سم

الاختبار الثانى

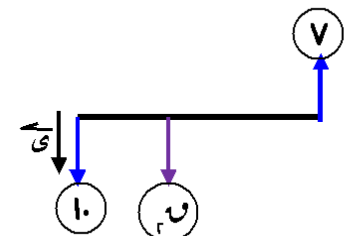
السؤال الأول : أختر الاجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة

(٤) قوتان متوازيتان و متضادتان فى الاتجاه مقدار احداهما ٧ نيوتن و مقدار محصلتهما ١٠ نيوتن فإن : مقدار القوة الأخرى يساوى ....

(أ) ٣ نيوتن　(ب) ١٧ نيوتن　(حـ) ٢٧ نيوتن　(ء) ٦ نيوتن

الحل

نفرض ى متجه وحدة فى اتجاه محصلة القوتين من الشكل المقابل :



١٠ ى = ق٢ ى − ٧ ى

و منها : ق٢ = ١٧ ى

أى أن : مقدار القوة الأخرى = ١٧ نيوتن

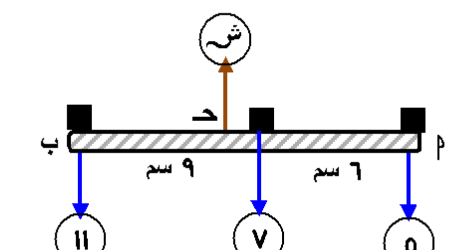
السؤال الثالث :

(أ) وضعت ثلاثة اجسام أوزانها ٥ ، ٧ ، ١١ ث كجم على قضيب خفيف كما بالشكل عين نقطة تعليق على القضيب بحيث يظل القضيب أفقياً

أ　ب　٦ سم　٩ سم　٥　٧　١١

الحل

نفرض أن : القضيب يعلق من نقطة حـ التى تبعد عن أ مسافة = ل وحدة طول



∵ القضيب متزن

∴ مجموع عزوم القوى حول نقطة حـ = ٠

∴ − ٥ × أحـ − ٧ × (أحـ − ٦)

+ ١١ × (أحـ − ل) = ٠

∴ − ٥ أحـ − ٧ أحـ + ٤٢ + ١٦٥

− ١١ أحـ = ٠ ، و منها : أحـ = ٩

أى أن : القضيب يعلق من نقطة على بعد ٩ وحدة طول من نقطة أ

الاختبار الثالث

السؤال الأول : أكمل ما يلى

(٣) إذا كانت : $\overrightarrow{ق_1}$ // $\overrightarrow{ق_2}$ ، $\overrightarrow{ق_1}$ = $\overrightarrow{س}$ − ٢ $\overrightarrow{ص}$ ، || $\overrightarrow{ق_2}$ || = ٤ $\sqrt{٥}$ وحدة فإن : $\overrightarrow{ق_2}$ = ...

الحل

∵ $\overrightarrow{ق_1}$ // $\overrightarrow{ق_2}$ ∴ $\overrightarrow{ق_2}$ = ك $\overrightarrow{ق_1}$ = (ك ، − ٢ ك)

∴ || $\overrightarrow{ق_2}$ || = || (ك ، − ٢ ك) ||

∴ ٤ $\sqrt{٥}$ = | ك | $\sqrt{٥}$ ∴ | ك | = ٤

∴ ك = ± ٤ ∴ $\overrightarrow{ق_2}$ = ± ٤ (١ ، − ٢)

السؤال الثالث :

(أ) أ ب قضيب غير منتظم طوله ١ متر يرتكز فى وضع أفقى على حاملين عند حـ ، ء حيث أحـ = ٣٠ سم ، ب ء = ١٠ سم

إذا كان أكبر ثقل يمكن تعليقه من نقطة أ أو من نقطة ب دون أن يختل توزان القضيب هو ٥ ، ٤ ث كجم على الترتيب

اوجد وزن القضيب

الحل

نفرض أن : وزن القضيب يؤثر عند نقطة تبعد عن حـ مسافة = ل سم ∴ عند تعليق ثقل ٥ كجم من أ فإن القضيب يصبح على وشك الدوران حول حـ ∴ ر$_ء$ = ٠

، ∵ القضيب متزن

∴ مجموع عزوم القوى حول نقطة حـ = ٠

∴ ٥ × ٣٠ − و × ل = ٠ ∴ و ل = ١٠٠ (١)

، عند تعليق ثقل ٤ كجم من ب

فإن القضيب يصبح على وشك الدوران حول ء

∴ ر$_{حـ}$ = ٠ ∵ القضيب متزن

∴ مجموع عزوم القوى حول نقطة حـ = ٠

∴ ٤ × ١٠ − و × (٧٠ − ل) = ٠

∴ ٤٠ − ٧٠ و + و ل = ٠ بالتعويض من (١) ينتج :

∴ ٧٠ و = ٤٠ + ١٠٠ و منها : و = ٢ ث كجم

، بالتعويض فى (١) ينتج : ل = ٥٠ سم

أى أن : وزن القضيب ٢ ث كجم معلق من نقطة على بعد ٧٠ سم من نقطة أ

الاختبار الرابع

السؤال الأول : أختر الاجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة

(٢) الشكل المقابل يمثل قضيب منتظم يرتكز على حامل عند منتصفه وضع عليه جسم كما بالشكل أى من القوى الآتية تحدث توازن القضيب

(أ) قوة مقدارها ١٠ نيوتن لأعلى تؤثر على بعد ٢٠ سم على يمين منتصف القضيب

(ب) قوة مقدارها ١٠ نيوتن لأسفل تؤثر على بعد ٢٠ سم على يمين منتصف القضيب

(حـ) قوة مقدارها ٣٠ نيوتن لأعلى تؤثر على بعد ٥ سم على يسار منتصف القضيب

(ء) قوة مقدارها ٣٠ نيوتن لأسفل تؤثر على بعد ٥ سم على يسار منتصف القضيب

الحل

بفرض أن : قوة مقدارها ق نيوتن لأسفل تؤثر على على بعد ل سم على يمين منتصف القضيب ، ∵ القضيب متزن

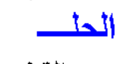
∴ مجموع عزوم القوى حول نقطة حـ = ٠

∴ ٢٠ × ١٠ − ق × ل = ٠

∴ ق × ل = ٢٠٠ و لكى يتحقق ذلك يجب أن يكون مقدار القوة ١٠ نيوتن و تؤثر لأسفل على بعد ٢٠ سم على يمين منتصف القضيب

السؤال الثالث :

(ا) قضيب منتظم طوله ٤ متر يرتكز على نقطة ارتكاز عند منتصفه علق ثقلان ٤ ، ٣ ث كجم فى احدى نصفيه و على بعد ١ ، ١,٥ متر من منتصفه على الترتيب و علق ثقلان ٥ ، و ث كجم فى النصف الآخر و على بعد $\frac{١}{٢}$ ، ٢ متر من منتصفه على الترتيب فإذا اتزن القضيب اوجد قيمة و



الحل

∵ القضيب متزن

∴ مجموع عزوم القوى حول نقطة حـ = ٠

∴ ٣ × $\frac{٣}{٢}$ + ٤ × ١ − ٥ × $\frac{١}{٢}$

− و × ٥ = ٠ و منها : و = ٣ ث كجم

الاختبار الخامس

السؤال الأول : أكمل ما يلى :

(٣) قوتان متوازيتان متحدا الاتجاه مقدار احداهما ضعف مقدار الأخرى و مقدار محصلتهما ٣٩ نيوتن فإن مقدار اصغرهما يساوى ....

الحل

بفرض أن : مقدار الصغرى = ق ∴ مقدار القوة الكبرى = ٢ ق

∵ القوتان متوازيتان متحدا الاتجاه ،

∴ ح = ق + ٢ ق ∴ ٣٩ = ٣ ق و منها : ق = ٣ نيوتن

السؤال الثالث :

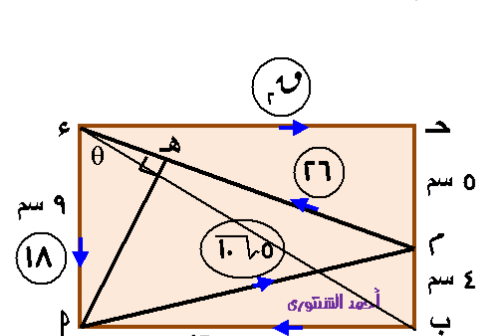
(ا) إذا كانت محصلة ثلاث قوى تؤثر على القضيب ا ب مهمل الوزن فى الشكل المقابل هى ١٣,٦ ث كجم و تؤثر لأعلى فى نقطة تبعد ٣ متر على يمين ا اوجد مقدار و اتجاه و نقطة تأثير القوة الثالثة فإذا اتزن القضيب اوجد قيمة و

الحل

نفرض أن : مقدار القوة الثالثة = ق
و تؤثر لأسفل فى نقطة تقع على يمين أ مسافة = ل متر
، ى متجه وحدة فى اتجاه ق
∴ − ١٣,٦ ى = (ق − ١٨ − ٢٠) ى
و منها ينتج : ق = ٢٤,٤ ث كجم و تؤثر لأسفل
، ∵ ج$_{أ}$ = عزم المحصلة حول أ
∴ ٢٠ × ٤ + ١٨ × ٠,٦ − ٢٤,٤ × ل = ١٣,٦ × ٣
و منها ينتج : ل = ٢,٠٥ متر

(٢) أ ب حـ ء مستطيل فيه أ ب = ١٢ سم ، ب حـ = ٩ سم ، م ∈ ب حـ بحيث ب م = ٤ سم أثرت قوى مقاديرها ق$_{١}$ ، ٥ $\sqrt{١٠}$ ، ٢٦ ، ق$_{٢}$ ، ١٨ نيوتن فى اتجاهات ب أ ، أ م ، م ء ، ء حـ ، ء أ على الترتيب فإذا كانت مجموعة القوى متزنة أوجد قيمتى ق$_{١}$ ، ق$_{٢}$

الحل



من هندسة الشكل : ب ء = ١٣ سم
∵ مجموعة القوى متزنة
∴ ج$_{م}$ = ٠
∴ ق$_{٢}$ × ٩ − ٢٦ × أ هـ = ٠
∴ ق$_{٢}$ × ٩ = ٢٦ × ٩ حا θ
∴ ق$_{٢}$ × ٩ = ٢٦ × ٩ × $\frac{١٢}{١٣}$
و منها : ق$_{٢}$ = ٢٤ نيوتن
، ج$_{م}$ = ٠ ∴ − ١٨ × ١٢ + ق$_{١}$ × ٤ − ق$_{٢}$ × ٥ = ٠
∴ − ١٨ × ١٢ + ٢٤ × ٤ − ق$_{٢}$ × ٥ = ٠
و منها : ق$_{١}$ = ٢٤ نيوتن





المتميز

فى
الرياضيات التطبيقية
الأستاتيكا

الجزء النظرى
و
حلول التمارين
الوحدة الرابعة

م س ر	جـ و	(س م ، ص م)	‖ ق ‖

إعداد : أحمد الشنتورى

الصف الثالث الثانوى
القسم العلمى
شعبة الرياضيات

٢٠١٧ / ٢٠١٨

الوحدة الرابعة .... الاتزان العام

٤ – ١ اتزان جسم جاسئ

انعدام عزم مجموعة من القوى بالنسبة لأى نقطة :

تعريف :

تتوازن عزوم الدوران المؤثرة على جسم فى اتجاه دوران عقارب الساعة مع عزوم الدوران فى عكس اتجاه دوران عقارب حتى يكون الجسم فى حالة اتزان

و من ذلك نجد أن :

يكون الجسم الزاقع تحت تأثير مجموعة من القوى المستوية فى حالة اتزان استاتيكى إذا تحقق الشرطان التاليان :

(١) أن ينعدم متجه محصلة القوى للمجموعة ($\overline{ح} = \overline{.}$)

(٢) أن ينعدم عزوم القوى بالنسبة لنقطة ($\overline{ج} = \overline{.}$)

و هذه الشروط الكافية و اللازمة لاتزان مجموعة من القوى المستوية الشكل المقابل :

يبين مجموعة متجهات الوحدة المتعامدة { $\overline{س}$ ، $\overline{ص}$ ، $\overline{ع}$ } بحيث يقع $\overline{س}$ ، $\overline{ص}$ فى مستوى القوى ، و بالتالى يكون $\overline{ع}$ عمودياً على هذا المستوى

و بذلك يمكن تحليل متجه $\overline{ح}$ فى اتجاهى $\overline{س}$ ، $\overline{ص}$ بينما $\overline{ج}$ يوازى متجه الوحدة $\overline{ع}$

لذلك فإن : $\overline{ح} = س\,\overline{س} + ص\,\overline{ص}$ ، $\overline{ج} = ج\,\overline{ع}$

حيث : س مجموعة المركبات الجبرية لقوى المجموعة فى اتجاه $\overline{س}$

، ص مجموعة المركبات الجبرية لقوى المجموعة فى اتجاه $\overline{ص}$

، ج مجموعة المركبات الجبرية لعزوم قوى المجموعة فى اتجاه $\overline{ع}$

و من ذلك نجد أنه إذا كان : س = . ، ص = . ، ج = .

فإن : $\overline{ح} = \overline{.}$ ، $\overline{ج} = \overline{.}$

و حيث لم يتم تحديد اتجاهى $\overline{س}$ ، $\overline{ص}$ فى المستوى فإنه يمكن التوصل للصياغة التالية :

الشروط الكافية و اللازمة لاتزان جسم تحت تأثير مجموعة من القوى المستوية :

لكى تتوازن مجموعة من القوى المستوية يلزم و يكفى أن تتحقق الشروط التالية :

(١) ينعدم مجموع المركبات الجبرية للقوى فى اتجاهين متعامدين واقعين فى مستويهما

(٢) ينعدم مجموع القياسات الجبرية لعزوم القوى بالنسبة لنقطة واحدة فى مستويها

و يمكن التعبير رياضياً عن هذه الشروط كالآتى :

س = . ، ص = . ، ج = .

خطوات دراسة إتزان جسم تحت تأثير مجموعة من القوى المستوية :

(١) تحديد جميع القوى المؤثرة على الجسم و إتجاهها و نقط تأثيرها

(٢) تحليل القوى المائلة إلى مركبتين فى إتجاهين متعامدين

(٣) تطبيق شروط الإتزان العام و هى :

١) المجموع الجبرى لمركبات القوى فى إتجاه ما (الأفقى عادة) = صفر " $\overline{س}$ = . "

٢) المجموع الجبرى لمركبات القوى فى الإتجاه العمودى (الرأسى عادة) = صفر " $\overline{ص}$ = . "

٣) المجموع الجبرى لعزوم القوى حول أى نقطة فى مستويها = صفر " ج = ٠ "

ملاحظات :

(١) إذا أرتكز قضيب على مستوى أملس فإن :
رد الفعل يكون عمودياً على المستوى

(٢) إذا أرتكز قضيب بإحدى نقاطه على (وتد ، حائط ، ....) فإن :
رد الفعل يكون عمودياً على القضيب

(٣) إذا أتصل قضيب بحائط رأسى عن طريق مفصل فإن :
رد الفعل غير معلوم الاتجاه و يمكن تحليله إلى مركبتين هما
رد الفعل هما $س_١$ ، $ص_١$ ، ل قياس زاوية ميله على الأفقى
حيث : $ر^٢ = س_١^٢ + ص_١^٢$ ، طا ل $= \frac{ص_١}{س_١}$

(٤) إذا أرتكز قضيب على مستوى خشن فإن :
رد الفعل غير معلوم الاتجاه و يمكن تحليله إلى مركبتين هما
رد الفعل العمودى على المستوى ، و قوة الاحتكاك فى عكس الاتجاه الذى يميل القضيب للحركة فيه
و يكون الاحتكاك نهائياً عندما يكون القضيب على وشك الحركة

إجابة حاول أن تحل (١) صفحة ٤٦

الشكل المقابل يمثل قضيباً مهمل الوزن طوله ٢١ سم متصلاً بحائط رأسى عن طريق مفصلة ، علق فى القضيب الوزن ١٢٠ نيوتن ، و ربط طرفه الحر بواسطة حبل إلى نقطة على الحائط فإذا كان القضيب فى حالة اتزان استاتيكى أفقياً أوجد مقدار الشد فى الحبل ثم أوجد مقدار و اتجاه رد فعل المفصل حيث : حا $\theta = \frac{٤}{٥}$

الحل

نفرض أن : مقدار مركبتى رد فعل المفصل عند أ هما : $س_١$ ، $ص_١$ ، الشكل المقابل يمثل القوى المؤثرة على القضيب ، ∵ القضيب متزن

∴ س = ٠ ∴ $س_١$ − ش حتا θ = ٠

∴ $س_١$ = ش حتا θ = $\frac{٣}{٥}$ ش (١)

، ص = ٠ ∴ $ص_١$ + ش حا θ − ١٢٠ = ٠

∴ $\frac{٤}{٥}$ ش = ١٢٠ − $ص_١$ (٢)

، $ج_أ$ = ٠ ∴ $ص_١$ × ٢١٠ = ٠ ∴ $ص_١$ = ٠

∴ من (٢) ينتج : $\frac{٤}{٥}$ ش = ١٢٠ ∴ ش = ١٥٠ نيوتن

، من (١) ينتج : $س_١$ = $\frac{٣}{٥}$ × ١٥٠ = ٩٠ نيوتن

∴ $ر^٢ = (٩٠)^٢ + (٠)^٢$ ∴ ر = ٩٠ نيوتن ، طا ل = $\frac{٠}{٩٠}$

∴ ل = ٠° أى أن : رد فعل المفصل = ٩٠ نيوتن و يميل على الأفقى بزاوية قياسها ٠° " اتجاه رد الفعل أفقى "

إجابة حاول أن تحل (٢) صفحة ٦٨

أ ب قضيب منتظم طوله ٦٠ سم و وزنه ٨ نيوتن يتصل طرفه أ بمفصل مثبت فى حائط رأسى ، علق ثقل قدره ٦ نيوتن فى نقطة من القضيب تبعد ٤٠ سم عن الطرف أ ، اتزن القضيب فى وضع أفقى بواسطة خيط خفيف يتصل أحد طرفيه بالطرف ب و ثبت الطرف الآخر للخيط فى نقطة على الحائط تبعد ٨٠ سم رأسياً أعلى أ
أوجد الشد فى الخيط و رد فعل المفصل

الحل

نفرض أن : مقدار مركبتى رد فعل المفصل عند أ هما : $س_١$ ، $ص_١$

الشكل المقابل يبين القوى المؤثرة على القضيب

من هندسة الشكل : أ حـ = ١٠٠ سم

∵ القضيب متزن ∴ س = ٠ ∴ $س_١$ − ش حتا θ = ٠

∴ $س_١$ = ش × $\frac{٣}{٥}$ (١)

، ص = ٠

∴ $ص_١$ + ش حتا θ − ٦ − ٨ = ٠

∴ $ص_١$ = ١٤ − ش × $\frac{٤}{٥}$ (٢)

، $جـ_أ$ = ٠ ∴ ش × أء − ٦ × ٤٠ − ٨ × ٣٠ = ٠

∴ ش × ٦ × حتا θ = ٦ × ٤٠ + ٨ × ٣٠

∴ ش × ٦٠ × $\frac{٤}{٥}$ = ٤٨٠ ∴ ش = ١٠ نيوتن

∴ من (١) ينتج : $س_١$ = ٦ ، من (٢) ينتج : $ص_١$ = ٦

∴ $ر^٢$ = $س_١^٢$ + $ص_١^٢$ = ٣٦ + ٣٦ = ٧٢ ∴ ر = ٦ $\sqrt{٢}$ نيوتن

، طا ل = $\frac{٦}{٦}$ ∴ ل = ٤٥°

أى أن : رد فعل المفصل = ٦ $\sqrt{٢}$ نيوتن و يميل على الأفقى بزاوية قياسها ٤٥°

إجابة حاول أن تحل (٣) صفحة ٦٩

أ ب قضيب منتظم وزنه ٣٠ ث كجم و طوله ٤ أمتار يرتكز بطرفه أ على مستو أفقى أملس و بطرفه الآخر ب على حائط رأسى أملس ، أتزن السلم فى مستو رأسى و كان قياس زاوية ميله على الأفقى ٤٥° بواسطة حبل أفقى يصل الطرف أ بنقطة من المستوى الأفقى تقع رأسياً أسفل ب تماماً ، فإذا صعد رجل وزنه ٨٠ ث كجم على هذا السلم ، فأثبت أن مقدار الشد فى الحبل يزداد كلما صعد الرجل ، و إذا كان الحبل لا يتحمل شداً يزيد مقداره على ٦٧ ث كجم فأوجد طول أكبر مسافة يمكن أن يصعدها الرجل دون أن ينقطع الحبل

الحل

الشكل المقابل يبين القوى المؤثرة على القضيب

∵ القضيب متزن

∴ س = ٠ ∴ $ر_ب$ − ش = ٠ ∴ $ر_ب$ = ش (١)

، ص = ٠ ∴ $ر_أ$ − ٣٠ − ٨٠ = ٠ ∴ $ر_أ$ = ١١٠ (٢)

، $جـ_أ$ = ٠ ∴ ٣٠ × ٢ حتا ٤٥° + ٨٠ × س حتا ٤٥° − $ر_ب$ × ٤ حا ٤٥° = ٠

∴ ٦٠ × $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ + ٨٠ س × $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ − ٤ $ر_ب$ × $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ = ٠

∴ ٦٠ + ٨٠ س − ٤ $ر_ب$ = ٠ ، بالتعويض من (١) ينتج :

٦٠ + ٨٠ س − ٤ ش = ٠ ∴ ش = ١٥ + ٢٠ س

و يلاحظ من هذه العلاقة أن : كلما زاد مقدار الشد فى الحبل (ش) زادت قيمة (س) أى كلما صعد الرجل لمسافة أكبر على السلم

و عندما لا يتحمل الحبل شداً يزيد مقداره على ٦٧ ث كجم " مقدار ش أكبر ما يمكن " يكون مقدار س أكبر ما يمكن

∴ ٦٧ = ١٥ + ٢٠ س و منها : س = ٢,٦ متراً

إجابة حاول أن تحل (٤) صفحة ٧٠

أ ب قضيب منتظم وزنه ٤٠ نيوتن ، يرتكز بطرفه أ على حائط رأسى معامل الاحتكاك بينه و بين القضيب يساوى $\frac{١}{٢}$ و بطرفه ب على أرض أفقية معامل الاحتكاك بينها و بين القضيب يساوى $\frac{١}{٣}$ ، فإذا كانت أقل قوة أفقية تجعل الطرف ب للقضيب على وشك الحركة نحو الحائط تساوى ٦٠ نيوتن ، فأوجد فى وضع التوازن قياس زاوية ميل القضيب على الأفقى ، علماً بأن القضيب يتزن فى مستوى رأسى

الحل

نفرض أن : طول القضيب = ل ، و أن القضيب يميل على الأفقى بزاوية قياسها θ

الشكل المقابل يبين القوى المؤثرة على القضيب

∵ القضيب متزن

∴ س = ٠ ∴ $م_١ ر_ب + ر_م - ق = ٠$

∴ $٦٠ = \frac{١}{٣} ر_ب + ر_م$

∴ $ر_ب + ٣ ر_م = ١٨٠$ (١)

، ص = ٠ ∴ $ر_ب - م_٢ ر_م - ٤٠ = ٠$ ∴ $ر_ب - \frac{١}{٢} ر_م = ٤٠$

∴ $٢ ر_ب - ر_م = ٨٠$ (٢) بضرب (١) × (− ٢) وجمعها مع (٢) ينتج :

$- ٧ ر_م = - ٢٨٠$ ∴ $ر_م = ٤٠$

، $ج_ب = ٠$ ∴ $٤٠ × \frac{١}{٢} ل$ حتا θ $- ر_م ×$ ل حا θ $+ م_٢ ر_م ×$ ل حتا θ $= ٠$

∴ ٢٠ حتا θ $- ر_م$ حا θ $+ \frac{١}{٢} ر_م$ حتا θ $= ٠$

∴ ٢٠ حتا θ − ٤٠ حا θ + ٢٠ حتا θ = ٠ ∴ ٤٠ حا θ = ٤٠ حتا θ

∴ طا θ = ١ ∴ θ = ٤٥°

إجابة حاول أن تحل (٥) صفحة ٧١

أ ب قضيب منتظم وزنه ٢٠ نيوتن و طوله ٦٠ سم يرتكز بطرفه أ على مستوى أفقى خشن ، و يرتكز عند إحدى نقطه حـ على وتد أملس يعلو ٢٥ سم عن المستوى الأفقى و كان القضيب على وشك الانزلاق عندما كانت زاوية ميله على الأفقى ٣٠° أوجد رد فعل الوتد و كذلك معامل الاحتكاك بين القضيب و المستوى علماً بأن القضيب فى مستوى رأسى

الحل

الشكل المقابل يبين القوى المؤثرة على القضيب

∵ القضيب متزن

∴ س = ٠ ∴ $ر_ب$ حا ٣٠° $- م ر_م = ٠$

∴ $\frac{١}{٢} ر_ب = م ر_م$

∴ $ر_ب = ٢ م ر_م$ (١)

، ص = ٠

∴ $ر_ب$ حتا ٣٠° $+ ر_م - ٢٠ = ٠$

∴ $ر_م = ٢٠ - \frac{\sqrt{٣}}{٢} ر_ب$ (٢)

، $ج_م = ٠$ ∴ ٢٠ × أ ء $- ر_ب ×$ أ حـ = ٠

∴ ٢٠ × ٣٠ حتا ٣٠° $- ر_ب ×$ و حـ قتا ٣٠° = ٠

∴ $٢٠ × ٣٠ × \frac{\sqrt{٣}}{٢} - ر_ب × ٢٥ × ٢ = ٠$ ∴ $ر_ب = ٦\sqrt{٣}$

أى أن رد فعل الوتد = $٦\sqrt{٣}$ نيوتن

بالتعويض فى (٢) ينتج : $ر_م = ٢٠ - ٩ = ١١$

بالتعويض فى (١) ينتج : $٦\sqrt{٣} = ٢ م × ١١$

∴ معامل الاحتكاك بين القضيب و المستوى (م) = $\frac{٣\sqrt{٣}}{١١}$

حل تمارين (٤ – ١) صفحة ٧٠ بالكتاب المدرسى

أولاً : ضع علامة (✓) أو علامة (×) :

(١) لكى تتزن مجموعة من القوى المستوية غير المتلاقية فى نقطة يلزم و يكفى أن ينعدم متجه القوى

(٢) لكى تتزن مجموعة من القوى المؤثرة على جسم ما يلزم و يكفى أن ينعدم مجموع المركبات الجبرية للقوى فى كل من اتجاهين متعامدين واقعين فى مستويها

(٣) إذا انعدم مجموع المركبات الجبرية للقوى لمجموعة ما ، و انعدم عزمها بالنسبة لنقطة واحدة فى مستويها كانت هذه المجموعة متزنة

(٤) يتزن السلم إذا ارتكز بأحد طرفيه على أرض أفقية ملساء و بطرفه الآخر على حائط رأسى خشن

الحل

(١) (×) لكى تتزن مجموعة من القوى المستوية غير المتلاقية فى نقطة يلزم و يكفى أن تتحقق الشروط التالية :

١) أن ينعدم متجه محصلة القوى للمجموعة ٢) أن ينعدم عزوم القوى بالنسبة لنقطة

(٢) (×) لكى تتزن مجموعة من القوى المؤثرة على جسم ما يلزم و يكفى أن

١) ينعدم مجموع المركبات الجبرية للقوى فى اتجاهين متعامدين واقعين فى مستويهما

٢) ينعدم مجموع القياسات الجبرية لعزوم القوى بالنسبة لنقطة واحدة فى مستويها

(٣) (✓)

(٤) (×) يمكن أن يتزن سلم بأحد طرفيه على أرض أفقية خشنة و بطرفه الآخر على حائط رأسى أملس

ثانياً : أكمل ما يأتى :

(٥) الشروط الكافية و اللازمة لاتزان مجموعة من القوى هى ....

(٦) إذا استند قضيب بأحد نقطه على وتد أملس فإن رد فعل الوتد يكون ....

(٧) إذا وضع جسم وزنه ٦ نيوتن على مستوى أفقى خشن معامل الاحتكاك بينه و بين الجسم $\frac{١}{٣}$ فإن مقدار القوة الأفقية التى تجعل على وشك الحركة تساوى ....

الحل

(٥) الشروط الكافية و اللازمة لاتزان مجموعة من القوى هى :

١) ينعدم مجموع المركبات الجبرية للقوى فى اتجاهين متعامدين واقعين فى مستويهما

٢) ينعدم مجموع القياسات الجبرية لعزوم القوى بالنسبة لنقطة واحدة فى مستويها

(٦) إذا استند قضيب بأحد نقطه على وتد أملس فإن رد فعل الوتد يكون عمودياً على القضيب

(٧) ∵ الجسم على وشك الحركة

∴ ر = ٦ن

، ق = م س ر

= $\frac{١}{٣}$ × ٦ = ٢ نيوتن

ثالثاً : أجب عن الأسئلة الآتية :

(٨) أ ب قضيب منتظم وزنه ٤ نيوتن و طوله ١٢٠ سم يتصل بأحد طرفيه بمفصل مثبت عند طرفه أ و المفصل مثبت فى حائط رأسى ، علق ثقل قدره ٦ نيوتن من نقطة على القضيب تبعد ٢٠ سم عن طرفه أ ثم حفظ القضيب فى وضع أفقى بواسطة حبل رفيع ب حـ مثبت طرفه حـ بنقطة تقع رأسياً فوق أ تماماً و تبعد عن أ مسافة ٩٠ سم أوجد مقدار الشد فى الحبل و مقدار و اتجاه رد فعل المفصل

الحل

نفرض أن : مقدار مركبتى رد فعل المفصل عند ؟ هما : $س_١$ ، $ص_١$

من هندسة الشكل : ب حـ = ١٥٠ سم

، ؟ ء = $\frac{١٢٠ \times ٦٠}{١٥٠}$ = ٧٢ سم

الشكل المقابل يبين القوى المؤثرة على القضيب

∵ القضيب متزن ∴ ∑ س = ٠ ∴ $س_١$ − ش حتا θ = ٠

∴ $س_١$ = ش × $\frac{٤}{٥}$ (١)

، ∑ ص = ٠ ∴ $ص_١$ + ش حتا θ − ٦ − ٤ = ٠

∴ $ص_١$ = ١٠ − ش × $\frac{٣}{٥}$ (٢)

، $ج_؟$ = ٠ ∴ ش × ؟ ء − ٦ × ٢٠ − ٤ × ٦٠ = ٠

∴ ش × ٧٢ = ٣٦٠ ∴ ش = ٥ نيوتن

∴ من (١) ينتج : $س_١$ = ٤ ، من (٢) ينتج : $ص_١$ = ٧

∴ $ر^٢$ = $س_١^٢$ + $ص_١^٢$ = ١٦ + ٤٩ = ٦٥ ∴ ر = $\sqrt{٦٥}$ نيوتن

، طا ل = $\frac{٧}{٤}$ ∴ ل = ١٥َ ٦٠° أى أن :

رد فعل المفصل = $\sqrt{٦٥}$ نيوتن و يميل على الأفقى بزاوية قياسها ١٥َ ٦٠°

(٩) ساق منتظمة وزنها ٤ ث كجم يتصل طرفها ؟ بمفصل مثبت فى حائط رأسى ، و تحمل عند طرفها الآخر ب ثقلاً قدره ٢ ث كجم حفظت الساق فى وضع يميل على الأفقى لأعلى بزاوية قياسها ٣٠° بواسطة حبل مساو لها فى الطول و يتصل طرفيه بالطرف ب للساق و يتصل طرفه الآخر بنقطة حـ من الحائط تقع رأسياً أعلى ؟ و على بعد منها يساوى طول الساق

أوجد مقدار الشد فى الحبل و مقدار قوة رد فعل المفصل

الحل

نفرض أن : طول الساق = ل

، مقدار مركبتى رد فعل المفصل عند ؟ هما : $س_١$ ، $ص_١$

من هندسة الشكل : ؟ ب = ب حـ = حـ ؟

، ؟ ء = ل حا ٦٠° = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ل

، ؟ م = ل حتا ٣٠° = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ل

، ؟ ك = $\frac{١}{٢}$ ل حتا ٣٠° = $\frac{\sqrt{٣}}{٤}$ ل

الشكل المقابل يبين القوى المؤثرة على الساق

∵ الساق متزن ∴ ∑ س = ٠ ∴ $س_١$ − ش حتا ٣٠° = ٠

∴ $س_١$ = ش × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ (١)

، ∑ ص = ٠ ∴ $ص_١$ + ش حا ٣٠° − ٢ − ٤ = ٠

∴ $ص_١$ = ٦ − ش × $\frac{١}{٢}$ (٢)

، $ج_؟$ = ٠ ∴ ش × ؟ ء − ٢ × ؟ م − ٤ × ؟ ك = ٠

∴ ش × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ل − ٢ × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ل − ٤ × $\frac{\sqrt{٣}}{٤}$ ل = ٠

∴ ش − ٢ − ٢ = ٠ ∴ ش = ٤ نيوتن

∴ من (١) ينتج : $س_١$ = ٢ $\sqrt{٣}$ ، من (٢) ينتج : $ص_١$ = ٤

∴ $ر^٢$ = $س_١^٢$ + $ص_١^٢$ = ١٢ + ١٦ = ٢٨ ∴ ر = ٢ $\sqrt{٧}$ نيوتن

أى أن : مقدار قوة رد فعل المفصل = ٢ $\sqrt{٧}$ نيوتن

(١٠) قضيب متزن وزنه (و) يرتكز بطرفه العلوى على حائط رأسى ، معامل الاحتكاك بينه و بين القضيب يساوى $\frac{١}{٢}$ و بطرفه السفلى على مستوى أفقى معامل الاحتكاك بينه و بين القضيب يساوى $\frac{٣}{٤}$ أوجد ظل الزاوية التى يصنعها القضيب مع الأفقى عندما يكون على

وشك الانزلاق

الحل

نفرض أن : طول القضيب = ل ، و أن القضيب يميل على الأفقى بزاوية قياسها θ

الشكل المقابل يبين القوى المؤثرة على القضيب

∵ القضيب متزن

∴ $س = ٠$ ∴ $ر_م - م_١ ر_ب = ٠$

∴ $ر_م = \frac{٣}{٤} ر_ب$ ∴ $\frac{٤}{٣} ر_م = ر_ب$ (١)

، $ص = ٠$ ∴ $ر_ب + م_٢ ر_م - و = ٠$ ∴ $ر_ب + \frac{١}{٢} ر_م = و$

بالتعويض من (١) ينتج : $\frac{٤}{٣} ر_م + \frac{١}{٢} ر_م = و$ ∴ $و = \frac{١١}{٦} ر_م$ (٢)

، $ج_ب = ٠$ ∴ $و \times \frac{١}{٢} ل \text{ حتا } \theta - ر_م \times ل \text{ حا } \theta - م_٢ ر_م \times ل \text{ حتا } \theta = ٠$

∴ $و \times \frac{١}{٢} ل \text{ حتا } \theta - ر_م \times ل \text{ حا } \theta + \frac{١}{٢} ر_م \times ل \text{ حتا } \theta = ٠$

بالقسمة ÷ حتا θ ينتج : ∴ $\frac{١}{٢} و - ر_م \times \text{ طا } \theta - \frac{١}{٢} ر_م = ٠$

بالتعويض من (١) ينتج : $\frac{١١}{١٢} ر_م - ر_م \times \text{ طا } \theta - \frac{١}{٢} ر_م = ٠$

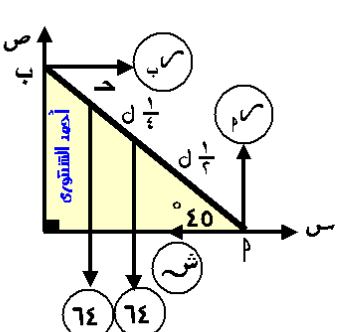
بالقسمة ÷ $ر_م$ ينتج : $\text{طا } \theta = \frac{١١}{١٢} - \frac{١}{٢} = \frac{٥}{١٢}$

∴ ظل الزاوية التى يصنعها القضيب مع الأفقى عندما يكون على وشك الانزلاق = $\frac{٥}{١٢}$

(١١) سلم منتظم وزنه ٦٤ ث كجم يرتكز بأحد طرفيه على حائط رأسى أملس و بطرفه الآخر على مستوى أفقى أملس و حفظ السلم فى رأسى فى وضع يميل فيه على الأفقى بزاوية قياسها ٤٥° بواسطة حبل مثبت فى قاعدة السلم و فى نقطة من المستوى تقع رأسياً أسفل قمة السلم ، وقف رجل وزنه يساوى وزن السلم على موضع من السلم يبعد $\frac{٣}{٤}$ طول السلم من ناحية القاعدة

عين قوة الشد فى الحبل و ردى فعل الحائط و المستوى

الحل



نفرض أن : طول القضيب = ل

الشكل المقابل يبين القوى المؤثرة على القضيب

∵ القضيب متزن

∴ $س = ٠$ ∴ $ر_ب - ش = ٠$

∴ $ر_ب = ش$ (١)

، $ص = ٠$ ∴ $ر_م - ٦٤ - ٦٤ = ٠$

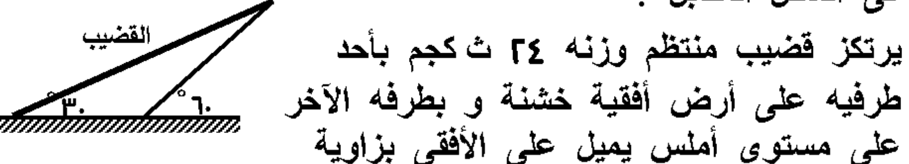
∴ $ر_م = ١٢٨$ ث كجم ، $ج_م = ٠$

∴ $٦٤ \times \frac{١}{٢} ل \text{ حتا } ٤٥° + ٦٤ \times \frac{٣}{٤} ل \text{ حتا } ٤٥° - ر_ب \times ل \text{ حا } ٤٥° = ٠$

∴ $٣٢ ل \times \frac{١}{\sqrt{٢}} + ٤٨ ل \times \frac{١}{\sqrt{٢}} = ر_ب \times ل \times \frac{١}{\sqrt{٢}}$

∴ $ر_ب = ٨٠$ ث كجم ، بالتعويض فى (١) ينتج : $ش = ٨٠$ ث كجم

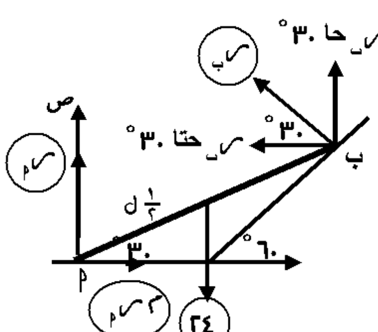
(١٢) فى الشكل المقابل :



يرتكز قضيب منتظم وزنه ٢٤ ث كجم بأحد طرفيه على أرض أفقية خشنة و بطرفه الآخر على مستوى أملس يميل على الأفقى بزاوية قياسها ٦٠° ، إذا كان القضيب على وشك الانزلاق عندما كان قياس زاوية ميله على الأفقى ٣٠°

فأوجد معامل الاحتكاك بين القضيب و الأرض و رد فعل كل من المستوى و الأرض

الحل



نفرض أن : طول القضيب = ل

الشكل المقابل يبين القوى المؤثرة على القضيب

∵ القضيب متزن

∴ س = ٠ ∴ م $ر_{أ}$ − $ر_{ب}$ حتا ٣٠° = ٠

∴ م $ر_{أ}$ = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ $ر_{ب}$ (١) ، ص = ٠

∴ $ر_{أ}$ + $ر_{ب}$ حا ٣٠° − ٢٤ = ٠ ∴ $ر_{أ}$ = ٢٤ − $\frac{١}{٢}$ $ر_{ب}$ (٢)

، $ج_{أ}$ = ٠ ∴ ٢٤ × $\frac{١}{٢}$ ل حتا ٣٠° − $ر_{ب}$ × ل حا ٦٠° = ٠

∴ ١٢ ل × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ = $ر_{ب}$ × ل × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

∴ $ر_{ب}$ = ١٢ ث كجم " رد فعل المستوى المائل "

، بالتعويض فى (٢) ينتج : $ر_{أ}$ = ١٨ ث كجم

و هو قوة رد الفعل العمودى بين القضيب و الأرض

، بالتعويض فى (١) ينتج : م = $\frac{\sqrt{٣}}{٣}$ " معامل الاحتكاك بين القضيب و الأرض "

و رد الفعل بين القضيب و الأرض هو رد الفعل المحصل (ر/) عند أ

أى محصلة $ر_{أ}$ ، م $ر_{أ}$ حيث :

$(ر^{/})^{٢} = (ر_{أ})^{٢} + (م\,ر_{أ})^{٢} = (١٨)^{٢} + (١٨ \times \frac{\sqrt{٣}}{٣})^{٢}$

∴ ر/ = ١٢ $\sqrt{٣}$ ث كجم و يميل على الأفقى بزاوية ظلها = م $ر_{أ}$ = $\frac{\sqrt{٣}}{٣}$

أى : زاوية قياسها = ٦٠°

(١٣) يرتكز سلم منتظم وزنه ١٠ ث كجم بطرفه أ على مستوى أملس و بطرفه ب على حائط رأسى أملس ، حفظ السلم فى مستوى رأسى فى وضع يميل فيه على الأفقى بزاوية قياسها ٤٥° بواسطة حبل أفقى يصل الطرف أ بنقطة من المستوى الأفقى رأسياً أسفل ب ، يصعد رجل وزنه ٨٠ ث كجم هذا السلم أوجد :

أولاً : قوة الشد فى الحبل عندما يكون الرجل قد قطع $\frac{٣}{٤}$ طول السلم

ثانياً : أقصى قيمة للشد التى يتحملها الحبل علماً بأنه يكون على وشك الانقطاع عندما يصل الرجل إلى قمة السلم

الحل

نفرض أن : طول القضيب = ل

أولاً : الشكل المقابل يبين القوى المؤثرة على القضيب

∵ القضيب متزن ∴ س = ٠ ∴ $ر_{ب}$ − شَ = ٠

∴ $ر_{ب}$ = شَ (١)

، ص = ٠ ∴ $ر_{أ}$ − ١٠ − ٨٠ = ٠

∴ $ر_{أ}$ = ٩٠ ث كجم ، $ج_{أ}$ = ٠

∴ ١٠ × $\frac{١}{٢}$ ل حتا ٤٥° + ٨٠ × $\frac{٣}{٤}$ ل حتا ٤٥° − $ر_{ب}$ × ل حا ٤٥° = ٠

∴ ٥ ل × $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ + ٦٠ ل × $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ = $ر_{ب}$ × ل × $\frac{١}{\sqrt{٢}}$

∴ $ر_{ب}$ = ٦٥ ث كجم ، بالتعويض فى (١) ينتج : شَ = ٦٥ ث كجم

و هو قوة الشد فى الحبل عندما يكون الرجل قد قطع $\frac{٣}{٤}$ طول السلم

ثانياً : الشكل المقابل يبين القوى المؤثرة على القضيب

∵ القضيب متزن

∴ س = ٠ ∴ $ر_{ب١}$ − شَ/ = ٠

∴ $ر_{ب١}$ = شَ/ (٢)

، ص = ٠ ∴ $ر_{أ١}$ − ١٠ − ٨٠ = ٠

∴ $ر_{أ١}$ = ٩٠ ث كجم ، $ج_{أ}$ = ٠

∴ ١٠ × $\frac{١}{٢}$ ل حتا ٤٥° + ٨٠ × ل حتا ٤٥° − $ر_{ب١}$ × ل حا ٤٥° = ٠

∴ ٥ ل × $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ + ٨٠ ل × $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ = $ر_{ب١}$ × ل × $\frac{١}{\sqrt{٢}}$

∴ $ر_{ب١}$ = ٨٥ ث كجم ، بالتعويض فى (١) ينتج : شَ/ = ٨٥ ث كجم

و هى أقصى قيمة للشد يتحملها الحبل عندما يصل الرجل لقمة السلم

(١٤) يرتكز قضيب منتظم وزنه ٤٠ نيوتن بطرفه أ على أرض أفقية خشنة و بطرفه ب على حائط رأسى أملس بحيث يكون القضيب فى مستوى رأسى عمودى على الحائط و يميل على الأرض الأفقية بزاوية قياسها ٤٥° ، أوجد مقدار أقل قوة أفقية تؤثر عند الطرف أ للقضيب لكى تجعله على وشك الانزلاق بعيداً عن الحائط علماً بأن معامل الاحتكاك بين القضيب و الأرض ٠,٧٥.

الحل

نفرض أن : طول القضيب = ل

الشكل المقابل يبين القوى المؤثرة على القضيب

∵ القضيب متزن　∴ س = ٠

∴ $ر_{ب}$ + ق − م $ر_{أ}$ = ٠

∴ ق = ٠,٧٥ $ر_{أ}$ − $ر_{ب}$　　(١)

، ص = ٠　∴ $ر_{أ}$ − ٤٠ = ٠　∴ $ر_{أ}$ = ٤٠ نيوتن　　(٢)

، $ج_{أ}$ = ٠　∴ ٤٠ × $\frac{1}{2}$ ل حتا ٤٥° − $ر_{ب}$ × ل حا ٤٥° = ٠

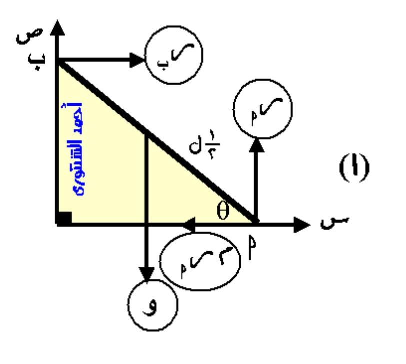
∴ ٢٠ ل × $\frac{1}{\sqrt{2}}$ = $ر_{ب}$ × ل × $\frac{1}{\sqrt{2}}$　∴ $ر_{ب}$ = ٢٠ نيوتن　　(٣)

، بالتعويض من (٢) ، (٣) فى (١) ينتج : ق = ٠,٧٥ × ٤٠ − ٢٠ = ١٠

∴ ق = ١٠ نيوتن و هى أقل قوة أفقية تجعل القضيب على وشك الانزلاق بعيداً عن الحائط

(١٥) قضيب منتظم يرتكز فى مستوى أفقى بطرفه العلوى على حائط رأسى أملس و بطرفه السفلى على مستوى خشن أفقى بحيث يصنع القضيب مع الأفقى زاوية ظلها $\frac{3}{2}$ أوجد معامل الاحتكاك بين القضيب و المستوى الأفقى عندما يكون على وشك الانزلاق

الحل



نفرض أن : طول القضيب = ل

الشكل المقابل يبين القوى المؤثرة على القضيب

∵ القضيب متزن　∴ س = ٠

∴ $ر_{ب}$ − م $ر_{أ}$ = ٠　∴ م $ر_{أ}$ = $ر_{ب}$　　(١)

، ص = ٠　∴ $ر_{أ}$ − و = ٠

∴ $ر_{أ}$ = و　　(٢)　　، $ج_{أ}$ = ٠

∴ و × $\frac{1}{2}$ ل حتا θ − $ر_{ب}$ × ل حا θ = ٠

بالقسمة ÷ ل حتا θ ينتج : $\frac{1}{2}$ و = $ر_{ب}$ طا θ

∴ $\frac{1}{2}$ و = $ر_{ب}$ × $\frac{3}{2}$　∴ $ر_{ب}$ = $\frac{1}{3}$ و　　(٣)

، بالتعويض من (٢) ، (٣) فى (١) ينتج : م × و = $\frac{1}{3}$ و

∴ م = $\frac{1}{3}$ و هو معامل الاحتكاك بين القضيب و المستوى الأفقى عندما يكون على وشك الانزلاق

(١٦) أب قضيب منتظم وزنه ٥٦ نيوتن يرتكز بطرفه أ على حائط رأسى أملس و بطرفه ب على أرض أفقية خشنة بحيث يقع فى مستوى رأسى و يميل فيه على الأفقى بزاوية قياسها ٤٥° أثبت أنه فى حالة اتزان القضيب معامل الاحتكاك ≥ ٠,٥ ، و إذا كان معامل الاحتكاك = ٠,٧٥ فعين القوة الأفقية التى تؤثر عند ب و تجعله على وشك الحركة :

أولاً : نحو الحائط

ثانياً : بعيداً عن الحائط

الحل

نفرض أن : طول القضيب = ل

الشكل المقابل يبين القوى المؤثرة على القضيب

∵ القضيب متزن ∴ $س = ٠$ ∴ $ر_ب - ع = ٠$ ∴ $ر_ب = ع$ (١)

، $ص = ٠$ ∴ $ر_م - ٥٦ = ٠$ ∴ $ر_م = ٥٦$ (٢)

، $ع_م = ٠$ ∴ $٥٦ \times \frac{١}{٢} ل$ حتا $٤٥° - ر_ب \times ل$ حا $٤٥° = ٠$

∴ $٢٨ ل \times \frac{١}{\sqrt{٢}} = ر_ب \times ل \times \frac{١}{\sqrt{٢}}$ ∴ $ر_ب = ٢٨$ نيوتن (٣)

، بالتعويض من (٣) فى (١) ينتج : $ع = ٢٨$

و ليكن : م معامل الاحتكاك ، ∵ $ع \leq م\, ر_م$ ∴ $٢٨ \leq م\, ر_م$

، من (٢) ينتج : $٢٨ \leq م \times ٥٦$ ∴ $م \geq ٠,٥$

أى أن : أنه فى حالة اتزان القضيب معامل الاحتكاك $\geq ٠,٥$

أولاً : الشكل المقابل يبين القوى المؤثرة على القضيب

∵ القضيب متزن ∴ $س = ٠$

∴ $ر_ب + م\, ر_م - ق = ٠$

∴ $ق = ر_ب + م\, ر_م$ (٤)

، $ص = ٠$ ∴ $ر_م - ٥٦ = ٠$

∴ $ر_م = ٥٦$ نيوتن (٥)

، $ع_م = ٠$ ∴ $٥٦ \times \frac{١}{٢} ل$ حتا $٤٥° - ر_ب \times ل$ حا $٤٥° = ٠$

∴ $٢٨ ل \times \frac{١}{\sqrt{٢}} = ر_ب \times ل \times \frac{١}{\sqrt{٢}}$ ∴ $ر_ب = ٢٨$ نيوتن (٦)

بالتعويض من (٥) ، (٦) في (٤) ينتج : $ق = ٢٨ + ٥٦ \times ٠,٧٥ = ٧٠$ نيوتن

و هى القوة الأفقية التى تجعل القضيب على وشك الحركة نحو الحائط

ثانياً : الشكل المقابل يبين القوى المؤثرة على القضيب

∵ القضيب متزن ∴ $س = ٠$

∴ $ر_ب - م\, ر_م + ق' = ٠$

∴ $ق' = م\, ر_م - ر_ب$ ، كما فى أولاً يكون :

∴ $ر_م = ٥٦$ نيوتن ، $ر_ب = ٢٨$ نيوتن

∴ $ق = ٥٦ \times ٠,٧٥ - ٢٨ = ١٤$ نيوتن

و هى القوة الأفقية التى تجعل القضيب على وشك الحركة بعيداً عن الحائط

(١٧) قضيب منتظم وزنه (و) يتصل أحد طرفيه بمفصل و يتصل طرفه الآخر بخيط مربوط فى نقطة فى نفس المستوى الأفقى المار بالمفصل بحيث كان قياس زاوية ميل كل القضيب و الخيط على الأفقى مساو هـ أثبت أن رد فعل المفصل يساوى $\frac{١}{٤}$ و $\sqrt{طتا^٢ هـ + ٩}$

الحل

نفرض أن : طول القضيب = ل وحدة طول

، مقدار مركبتى رد فعل المفصل عند أ هما : $س_١$ ، $ص_١$

من هندسة الشكل : أ ء = أ ب حا ٢θ = ٢ ل حا θ حتا θ

∴ أ حـ = أ ء قتا θ = ٢ ل حا θ حتا θ قتا θ = ٢ ل حتا θ

، أ هـ = $\frac{١}{٢}$ ل حتا θ

الشكل المقابل يبين القوى المؤثرة على القضيب

∵ القضيب متزن

$س_١$ = ش حتا θ (١)

$ص_١$ = و − ش حا θ (٢)

، $ع_أ = ٠$ ∴ ش حا θ × أ حـ − و × أ هـ = ٠

∴ ش حا θ × ٢ ل حتا θ − و × $\frac{١}{٢}$ ل حتا θ = ٠

و منها : ش = $\frac{١}{٤}$ و قتا θ ، بالتعويض فى (١) ، (٢) ينتج :

$س_١$ = $\frac{١}{٤}$ و طتا θ ، $ص_١$ = $\frac{٣}{٤}$ و

∴ $(ر)^٢ = (س_١)^٢ + (ص_١)^٢ = \frac{١}{١٦} و^٢ طتا^٢ \theta + \frac{٩}{١٦} و^٢$

$= \frac{١}{١٦} و^٢ (طتا^٢ \theta + ٩)$ ∴ ر = $\frac{١}{٤}$ و $\sqrt{طتا^٢ هـ + ٩}$

حل تمارين عامة صفحة ٧٤ بالكتاب المدرسى

(١) يرتكز قضيب غير منتظم م ب طوله ١٤٠ سم بطرفه ب على أرض أفقية و بطرفه م على حائط رأسى ، إذا كان معامل الاحتكاك بين القضيب و كل من الأرض و الحائط يساوى $\frac{١}{٢}$ ، $\frac{١}{٣}$ على الترتيب و كان القضيب على وشك الانزلاق عندما كان قياس زاوية ميله على الأفقى ٤٥° فأوجد بعد مركز ثقل القضيب عن الطرف ب

الحل

نفرض أن : مركز ثقل القضيب على بعد ل من ب

الشكل المقابل يبين القوى المؤثرة على القضيب

∵ القضيب متزن ∴ س = ٠

∴ $ر_م - م_١ ر_ب = ٠$

∴ $ر_م = \frac{١}{٢} ر_ب$ (١)

، ص = ٠ ∴ $ر_ب + م_٢ ر_م - و = ٠$

∴ $و = ر_ب + \frac{١}{٣} ر_م$ ، بالنعويض من (١) ينتج :

$و = ر_ب + \frac{١}{٦} ر_ب = \frac{٧}{٦} ر_ب$ (٢) ، $ع_ب = ٠$

∴ و × ل حتا ٤٥° − $ر_م$ × ١٤٠ حا ٤٥° − $\frac{١}{٣} ر_م$ × ١٤٠ حا ٤٥° = ٠

∴ $و ل \times \frac{١}{\sqrt{٢}} = ١٤٠ ر_م \times \frac{١}{\sqrt{٢}} + \frac{١}{٣} ر_م \times ١٤٠ \times \frac{١}{\sqrt{٢}}$

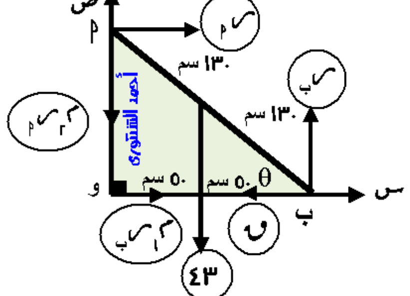
∴ $و ل = ١٤٠ ر_م + \frac{١}{٣} ر_م \times ١٤٠$ ∴ $و ل = \frac{٤}{٣} \times ١٤٠ ر_م$

، بالنعويض من (١) ، (٢) ينتج : $\frac{٧}{٦} ر_ب ل = \frac{٤}{٣} \times ١٤٠ \times \frac{١}{٢} ر_ب$

∴ ل = ٨٠ أى أن : بعد مركز ثقل القضيب عن الطرف ب = ٨٠ سم

(٢) م ب قضيب منتظم طوله ٢٦٠ سم و وزنه ٤٣ نيوتن يرتكز بطرفه م على حائط رأسى و بطرفه ب على أرض أفقية و كان معاملا الاحتكاك بين القضيب و كل من الحائط و الأرض يساوى $\frac{١}{٤}$ ، $\frac{١}{٢}$ على الترتيب و كان الطرف ب يبعد ١٠٠ سم عن الحائط ، أوجد مقدار القوة الأفقية التى إذا أثرت فى الطرف ب جعلت القضيب على وشك الحركة نحو الحائط

الحل



الشكل المقابل يبين القوى المؤثرة على القضيب

، من هندسة الشكل : م و = ٢٤٠ سم

∵ القضيب متزن ∴ س = ٠

∴ $ر_م - ق + م_١ ر_ب = ٠$

∴ $ق = \frac{١}{٢} ر_ب + ر_م$ (١)

، ص = ٠ ∴ $ر_ب - م_٢ ر_م - ٤٣ = ٠$

∴ $ر_ب = \frac{١}{٤} ر_م + ٤٣$ (٢) ، $ع_م = ٠$

∴ ٤٣ × ١٣٠ حتا θ + $م_٢ ر_م$ × ٢٦٠ حتا θ − $ر_م$ × ٢٦٠ حا θ = ٠

∴ $٤٣ \times ١٣٠ \times \frac{١٠٠}{٢٦٠} = ر_م \times ٢٦٠ \times \frac{٢٤٠}{٢٦٠} - \frac{١}{٤} ر_م \times ٢٦٠ \times \frac{١٠٠}{٢٦٠}$

∴ $ر_م = ١٠$ نيوتن (٣) ، بالتعويض من (٣) فى (٢) ينتج :

$ر_ب = \frac{١}{٤} \times ١٠ + ٤٣ = ٤٥,٥$ نيوتن (٤)

، بالتعويض من (٣) ، (٤) فى (١) ينتج : $ق = \frac{١}{٢} \times ٤٥,٥ + ١٠ = ٣٢,٧٥$

∴ ق = ٣٢,٧٥ نيوتن و هى القوة أفقية تجعل القضيب على وشك الحركة نحو الحائط

(٣) يرتكز سلم منتظم وزنه ٤٠ ث كجم بأحد طرفيه على حائط رأسى أملس و بطرفه الآخر على أرض أفقية خشنة بحيث يقع فى مستوى رأسى عمودى على الحائط و يميل السلم على الأفقى بزاوية قياسها ٤٥° صعد ولد وزنه يساوى وزن السلم فأصبح السلم على وشك الانزلاق عندما يقطع الولد مسافة $\frac{٣}{٤}$ طول السلم أوجد معامل الاحتكاك بين الأرض و السلم ، و إذا أراد الولد أن يتم صعود السلم فأوجد أقل قوة أفقية تؤثر على الطرف السفلى للسلم حتى يتمكن الولد من ذلك

الحل

نفرض أن : طول القضيب = ل

أولاً : الشكل المقابل يبين القوى المؤثرة على القضيب

∵ القضيب متزن ∴ س = ٠ ∴ ر$_{ب}$ − م ر$_{أ}$ = ٠

∴ ر$_{ب}$ = م ر$_{أ}$ (١)

، ص = ٠ ∴ ر$_{أ}$ − ٤٠ − ٤٠ = ٠

∴ ر$_{أ}$ = ٨٠ ث كجم ، ع$_{أ}$ = ٠

∴ ٤٠ × $\frac{١}{٢}$ ل حتا ٤٥° + ٤٠ × $\frac{٣}{٤}$ ل حتا ٤٥° − ر$_{ب}$ × ل حا ٤٥° = ٠

∴ ٢٠ ل × $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ + ٣٠ ل × $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ = ر$_{ب}$ × ل × $\frac{١}{\sqrt{٢}}$

∴ ر$_{ب}$ = ٥٠ ث كجم ، بالتعويض فى (١) ينتج : م ر$_{أ}$ = ٥٠

∴ م × ٨٠ = ٥٠ ∴ م = $\frac{٥}{٨}$

و هو معامل الاحتكاك بين الأرض السلم

ثانياً : الشكل المقابل يبين القوى المؤثرة على القضيب

∵ القضيب متزن

∴ س = ٠ ∴ ر$_{ب١}$ + م ر$_{أ١}$ − ق = ٠

∴ ق = ر$_{ب١}$ + $\frac{٥}{٨}$ ر$_{أ١}$ (٢)

، ص = ٠ ∴ ر$_{أ١}$ − ٤٠ − ٤٠ = ٠

∴ ر$_{أ١}$ = ٨٠ ث كجم (٣) ، ع$_{أ}$ = ٠

∴ ٤٠ × $\frac{١}{٢}$ ل حتا ٤٥° + ٤٠ × ل حتا ٤٥° − ر$_{ب١}$ × ل حا ٤٥° = ٠

∴ ٢٠ ل × $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ + ٤٠ ل × $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ = ر$_{ب١}$ × ل × $\frac{١}{\sqrt{٢}}$

∴ ر$_{ب١}$ = ٦٠ ث كجم (٤) ، من (٢) ، (٣) ، (٤) ينتج :

ق = ٦٠ + $\frac{٥}{٨}$ × ٨٠ = ١١٠ ث كجم و هى أقل قيمة أفقية تؤثر على الطرف السفلى للسلم حتى يتمكن الولد من صعود السلم

(٤) أ ب قضيب منتظم وزنه ١٥ ث كجم يرتكز بطرفه أ على أرض أفقية و بطرفه ب على حائط رأسى أملس بحيث يقع القضيب فى مستوى رأسى عمودى على الحائط و يميل القضيب على الأفقى بزاوية قياسها ٤٥° ، أثرت قوة أفقية ق عند نقطة حـ من القضيب بحيث أ حـ يساوى $\frac{١}{٤}$ طول القضيب فأصبح الطرف أ على وشك الحركة نحو الحائط إذا كان معامل الاحتكاك بين القضيب و الأرض يساوى $\frac{١}{٢}$ أوجد القوة ق و رد فعل الحائط

الحل

نفرض أن : طول القضيب = ل

الشكل المقابل يبين القوى المؤثرة على القضيب

∵ القضيب متزن ∴ س = ٠

∴ ر$_{ب}$ + م ر$_{أ}$ − ق = ٠

∴ ق = ر$_{ب}$ + $\frac{١}{٢}$ ر$_{أ}$ (١) ، ص = ٠

∴ ر$_{أ}$ − ١٥ = ٠ ∴ ر$_{أ}$ = ١٥ ث كجم (٢) ، ع$_{أ}$ = ٠

∴ ١٥ × $\frac{١}{٢}$ ل حتا ٤٥° + ق × $\frac{١}{٤}$ ل حتا ٤٥° − ر$_{ب}$ × ل حا ٤٥° = ٠

∴ $\frac{١٥}{٢}$ ل × $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ + $\frac{١}{٤}$ ق ل × $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ = ر$_{ب}$ × ل × $\frac{١}{\sqrt{٢}}$

∴ $ر_{ب} = \frac{١٥}{٢} + \frac{١}{٤}$ ن (٣) ، من (١) ، (٢) ، (٣) ينتج :

ن = $\frac{١٥}{٢} + \frac{١}{٤}$ ن + $\frac{١}{٢} \times ١٥$ ∴ $\frac{٣}{٤}$ ن = ١٥ ∴ ن = ٢٠ ث كجم

(٥) سلم منتظم يرتكز بأحد طرفيه على حائط رأسى خشن و بطرفه الآخر على أرض أفقية خشنة و كان معامل الاحتكاك بين السلم و كل من الحائط و الأرض يساوى $\frac{١}{٢}$ فإذا أتزن السلم فى مستوى رأسى عمودى على الحائط فى وضع يميل على الحائط بزاوية ظلها $\frac{٤}{٣}$ ، برهن أن رجلاً وزنه يساوى ضعف وزن السلم لا يمكنه الصعود أكثر من $\frac{١}{٢}$ طول السلم دون أن يختل التوازن

الحل

نفرض أن : طول القضيب = ل

، و أن أقصى مسافة يصعدها الرجل السلم = ك

الشكل المقابل يبين القوى المؤثرة على القضيب

∵ القضيب متزن ∴ س = ٠ .

∴ $ر_{ب} - م\, ر_{م} = ٠$ ∴ $ر_{ب} = \frac{١}{٢} ر_{م}$ (١)

، ص = ٠ ∴ $ر_{م} + م\, ر_{ب}$ − و − ٢ و = ٠ .

∴ $ر_{م} + \frac{١}{٢} ر_{ب}$ = ٣ و (٢)

من (١) ، (٢) ينتج : $ر_{م} + \frac{١}{٤} ر_{م}$ = ٣ و ∴ $\frac{٥}{٤} ر_{م}$ = ٣ و

∴ $ر_{م} = \frac{١٢}{٥}$ و ، $ر_{ب} = \frac{٦}{٥}$ و ، $ع_{م} = ٠$.

∴ ٢ و × ك حا θ + و × $\frac{١}{٢}$ ل حا θ − $ر_{ب}$ × ل حتا θ − م $ر_{ب}$ × ل حا θ = ٠ .

بالقسمة ÷ حا θ ، التعويض عن $ر_{ب}$ ينتج :

∴ ٢ و ك + $\frac{١}{٢}$ و ل = $\frac{٦}{٥}$ و ل طتا θ + $\frac{١}{٢} \times \frac{٦}{٥}$ و ل

، ∵ طا θ = $\frac{٤}{٣}$ ∴ طتا θ = $\frac{٣}{٤}$ ، و القسمة ÷ و ينتج :

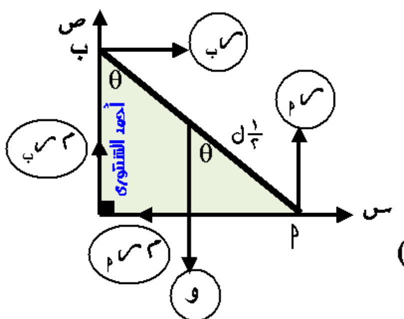
٢ ك = $\frac{٦}{٥}$ ل × $\frac{٣}{٤}$ + $\frac{١}{٢} \times \frac{٦}{٥}$ ل − $\frac{١}{٢}$ ل

∴ ٢ ك = ل ∴ ك = $\frac{١}{٢}$ ل

أى أن : الرجل لا يمكنه الصعود من $\frac{١}{٢}$ طول السلم دون أن يختل التوازن

(٦) قضيب منتظم وزنه (و) يستند بأحد طرفيه على حائط رأسى خشن و بطرفه الآخر على أرض أفقية خشنة و كان معامل الاحتكاك بين القضيب و الحائط يساوى $\frac{١}{٤}$ ، و معامل الاحتكاك بين القضيب و الأرض يساوى $\frac{١}{٣}$ فإذا أتزن القضيب فى مستوى رأسى عمودى على الحائط فأوجد ظل زاوية ميل القضيب على الرأسى عندما يكون القضيب على وشك الانزلاق

الحل



نفرض أن : طول القضيب = ل

الشكل المقابل يبين القوى المؤثرة على القضيب

∵ القضيب متزن ∴ س = ٠ .

∴ $ر_{ب} - م\, ر_{م} = ٠$ ∴ $ر_{ب} = \frac{١}{٣} ر_{م}$ (١)

، ص = ٠ ∴ $ر_{م} + م\, ر_{ب}$ − و = ٠ .

∴ $ر_{م} + \frac{١}{٤} ر_{ب}$ = و ، بالتعويض من (١) ينتج :

$ر_{م} + \frac{١}{٤} \times \frac{١}{٣} ر_{م}$ = و ∴ $\frac{١٣}{١٢} ر_{م}$ = و

∴ $ر_{م} = \frac{١٢}{١٣}$ و ، من (١) ينتج : $ر_{ب} = \frac{٤}{١٣}$ و ، $ع_{م} = ٠$.

∴ و × $\frac{١}{٢}$ ل حا θ − $ر_{ب}$ × ل حتا θ − م $ر_{ب}$ × ل حا θ = ٠ .

بالقسمة ÷ ل حا θ ، التعويض عن $ر_{ب}$ ينتج :

$\frac{1}{2}$ و = $\frac{4}{13}$ و × طتا θ + $\frac{1}{4}$ × $\frac{4}{13}$ و   بالقسمة ÷ و ينتج :

$\frac{1}{2}$ = $\frac{4}{13}$ × طتا θ + $\frac{1}{4}$ × $\frac{4}{13}$ ∴ $\frac{4}{13}$ × طتا θ = $\frac{1}{2}$ − $\frac{1}{13}$

∴ طتا θ = $\frac{11}{8}$ ∴ طا θ = $\frac{8}{11}$

أى أن : ظل زاوية ميل القضيب على الرأسى = $\frac{8}{11}$

(٧) يتزن سلم فى مستوٍ رأسى على حائط رأسى و أرض أفقية ، إذا كان قياس زاوية الاحتكاك بين السلم و كل من الحائط و الأرض هى ل فأثبت أن قياس زاوية ميل السلم على الرأسى عندما يكون على وشك الانزلاق θ = ٢ ل

الحل

م = طا ل

نفرض أن : طول القضيب = ل

الشكل المقابل يبين القوى المؤثرة على القضيب

∵ القضيب متزن ∴ ح س = ٠

∴ $ر_ب$ − م $ر_أ$ = ٠ ∴ $ر_ب$ = $ر_أ$ طا ل (١)

، ح ص = ٠ ∴ $ر_أ$ + $ر_ب$ طا ل − و = ٠ ∴ و = $ر_أ$ + $ر_ب$ طا ل (٢)

، $ج_أ$ = ٠ ∴ و × $\frac{1}{2}$ ل حا θ − $ر_ب$ × ل حتا θ − م $ر_ب$ × ل حا θ = ٠

بالقسمة ÷ ل حا θ ، التعويض عن $ر_ب$ ينتج :

$\frac{1}{2}$ و = $ر_ب$ طتا θ + طا ل $ر_ب$ ∴ $\frac{1}{2}$ و = $ر_ب$ (طتا θ + طا ل)

بالتعويض من (١) ، (٢) ينتج : $\frac{1}{2}$ ($ر_أ$ + $ر_ب$ طا ل) = $ر_أ$ (طتا θ + طا ل)

∴ $\frac{1}{2}$ $ر_أ$ + $\frac{1}{2}$ $ر_أ$ طا² ل = $ر_أ$ طا ل طتا θ + $ر_أ$ طا² ل

∴ $\frac{1}{2}$ + $\frac{1}{2}$ طا² ل = طا ل طتا θ + طا² ل

∴ طا ل طتا θ = $\frac{1}{2}$ + $\frac{1}{2}$ طا² ل − طا² ل = $\frac{1}{2}$ − $\frac{1}{2}$ طا² ل

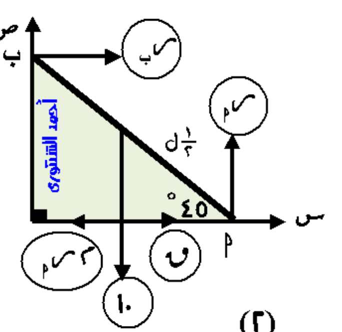
∴ طتا θ = $\frac{١ - طا^2 ل}{٢ طا ل}$ ∴ طا θ = $\frac{٢ طا ل}{١ - طا^2 ل}$

∴ طا θ = طا ٢ ل   ∴ θ = ٢ ل

(٨) أ ب قضيب منتظم وزنه ١٠ ث كجم يستند بطرفه أ على أرض أفقية خشنة و بطرفه ب على حائط رأسى أملس بحيث يكون القضيب فى رأسى عمودى على الحائط و يميل على الأرض الأفقية بزاوية قياسها ٤٥° فإذا كان معامل الاحتكاك بين القضيب و الأرض يساوى $\frac{3}{4}$

أوجد مقدار أقل قوة أفقية تؤثر عند الطرف أ للقضيب و تجعله على وشك الانزلاق بعيداً عن الحائط و مقدار رد فعل الحائط

الحل



نفرض أن : طول القضيب = ل

الشكل المقابل يبين القوى المؤثرة على القضيب

∵ القضيب متزن ∴ ح س = ٠

∴ $ر_ب$ − م $ر_أ$ + ق = ٠

∴ ق = $\frac{3}{4}$ $ر_أ$ − $ر_ب$ (١) ، ص = ٠

∴ $ر_أ$ − ١٠ = ٠ ∴ $ر_أ$ = ١٠ ث كجم (٢)

، $ج_أ$ = ٠ ∴ ١٠ × $\frac{1}{2}$ ل حتا ٤٥° − $ر_ب$ × ل حا ٤٥° = ٠

∴ ٥ ل × $\frac{1}{\sqrt{2}}$ = $ر_ب$ × ل × $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ∴ $ر_ب$ = ٥ ث كجم (٣)

من (١) ، (٢) ، (٣) ينتج :

ق = $\frac{3}{4}$ × ١٠ − ٥   ∴ ق = $\frac{5}{2}$ ث كجم

حل اختبار تراكمى صفحة ٧٥ بالكتاب المدرسى

تذكر ما يلى :

[١] إذا أتزن جسم جاسئ تحت تأثير قوتين فإنه يمكن نقل نقطة تأثير أى من القوتين إلى نقطة أخرى على خط عملها دون أن يؤثر ذلك فى اتزان الجسم

[٢] قاعدة مثلث القوى :
إذا أتزنت ثلاث قوى مستوية و متلاقية فى نقطة و رسم مثلث أضلاعه توازى خطوط عمل القوى الثلاث و فى إتجاه دورى واحد فإن أطوال أضلاع المثلث تتناسب مع مقادير القوى المناظرة

[٣] قاعدة لامى :
إذا أتزنت ثلاث قوى مستوية و متلاقية فى نقطة فإن مقدار كل قوة يتناسب مع جيب الزاوية المحصورة بين القوتين الأخريين

[٤] إذا أتزن جسم تحت تأثير ثلاث قوى غير متوازية و مستوية فإن خطوط عمل هذه القوى تتلاقى فى نقطة واحدة

(١) ثلاث قوى مقاديرها ٤ ، ٥ ، ٦ نيوتن تؤثر فى نقطة مادية ، فإذا كانت المجموعة متزنة فما قياس الزاوية بين القوتين الأخيرتين

الحل

∵ المجموعة متزنة ∴ $ق_١ = ٥$ ، $ق_٢ = ٦$

و محصلتهما : ح = ٤

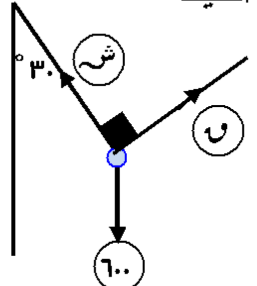
، ∵ $ح^٢ = ق_١^٢ + ق_٢^٢ + ٢ ق_١ ق_٢$ حتا ى

∴ ١٦ = ٢٥ + ٣٦ + ٢ × ٥ × ٦ حتا ى و منها :

حتا ى = $-\frac{٣}{٤}$ ∴ ى = ١٤٣° ٨َ

أى أن : قياس الزاوية بين القوتين الأخيرتين هى ١٤٣° ٨َ

(٢) أزيحت كرة بندول وزنها ٦٠٠ ث جم حتى صار الخيط يصنع زاوية قياسها ٣٠° مع الرأسى تحت تأثير قوة على الكرة فى اتجاه عمودى على الخيط أوجد مقدار القوة و مقدار الشد فى الخيط



الحل

∵ كرة البندول متزنة تحت تأثير ثلاث قوى مستوية و متلاقية فى نقطة

∴ من قاعدة لامى يكون : $\frac{٦٠٠}{حا ٩٠°} = \frac{ق}{حا ١٥٠°} = \frac{ش}{حا ١٢٠°}$

∴ $ق = \frac{٦٠٠ \times حا ١٥٠°}{حا ٩٠°} = ٣٠٠$ ث جم

، $ش = \frac{٦٠٠ \times حا ١٢٠°}{حا ٩٠°} = ٣٠٠\sqrt{٣}$ ث جم



حل آخر

∵ كرة البندول متزنة تحت تأثير ثلاث قوى مستوية و متلاقية فى نقطة و أضلاع المثلث أ ب حـ توازى خطوط عمل القوى و فى اتجاه دورى واحد

∴ المثلث أ ب حـ هو مثلث القوى و هو مثلث ثلاثينى ستينى

∴ أ ب : ب حـ : أ حـ = ١ : $\sqrt{٣}$: ٢

∴ $\frac{٦٠٠}{٢} = \frac{ق}{١} = \frac{ش}{\sqrt{٣}}$

∴ ق = ٣٠٠ ث جم ، ش = $٣٠٠\sqrt{٣}$ ث جم

(٣) علق ثقل وزنه ٢٦ نيوتن بخيطين طولهما ٢٥ سم ، ٦٠ سم ، و ثبت الطرفان الآخران للخيطين فى نقطتين من خط أفقى البعد بينهما ٦٥ سم ، أوجد الشد فى كل من الخيطين

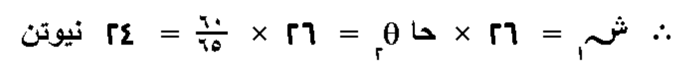
الحل

∵ المجموعة متزنة تحت تأثير ثلاث قوى مستوية و متلاقية فى نقطة

∴ من قاعدة لامى يكون :

$$\frac{٢٦}{\text{حا } ٩٠^\circ} = \frac{ش_١}{\text{حا}(١٨٠^\circ - \theta_٢)} = \frac{ش_٢}{\text{حا}(١٨٠^\circ - \theta_١)}$$

$$\therefore \frac{٢٦}{١} = \frac{ش_١}{\text{حا } \theta_٢} = \frac{ش_٢}{\text{حا } \theta_١}$$



∴ $ش_١ = ٢٦ \times \text{حا } \theta_٢ = ٢٦ \times \frac{٦٠}{٦٥} = ٢٤$ نيوتن

، $ش_٢ = ٢٦ \times \text{حا } \theta_١ = ٢٦ \times \frac{٢٥}{٦٥} = ١٠$ نيوتن

(٤) علق ثقل وزنه (و) نيوتن بواسطة خيطين يميلان على الرأسى بزاويتين قياسيهما θ° ، ٣٠° فاتزن الجسم عندما كان الشد فى الخيط الأول ١٢ نيوتن و الشد فى الخيط الثانى ٩ نيوتن أوجد قيمة الوزن (و) و قياس الزاوية θ

الحل

∵ المجموعة متزنة تحت تأثير ثلاث قوى مستوية و متلاقية فى نقطة ∴ من قاعدة لامى يكون :

$$\frac{١٢}{\text{حا } ١٥٠^\circ} = \frac{٩}{\text{حا}(١٨٠^\circ - \theta)} = \frac{و}{\text{حا}(٣٠^\circ + \theta)}$$

∴ $١٢ \times \text{حا}(١٨٠^\circ - \theta) = ٩ \times \text{حا } ١٥٠^\circ$

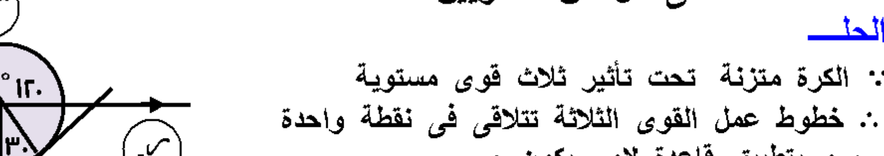
∴ $١٢ \times \text{حا } \theta = ٩ \times \frac{١}{٢}$ ∴ $\text{حا } \theta = \frac{٣}{٨}$ ∴ $\theta = ٢٢^\circ \ ١'$

، $و \times \text{حا } ١٥٠^\circ = ١٢ \times \text{حا}(٣٠^\circ + \theta)$

∴ $و \times \frac{١}{٢} = ١٢ \times \text{حا } ٥٢^\circ \ ١'$ ∴ $و = ٢٤ \times \text{حا } ٥٢^\circ \ ١' \simeq ١٨,٩$ نيوتن

(٥) كرة مصمتة وزنها ٣٠ ث جم تستند بسطحها على مستويين ، فإذا كانت الكرة فى حالة اتزان بين مستويين أملسين أحدهما رأسى و الآخر يميل على الرأسى بزاوية قياسها ٦٠° ، أوجد مقدار قوتى الضغط على كل من المتويين

الحل



∵ الكرة متزنة تحت تأثير ثلاث قوى مستوية

∴ خطوط عمل القوى الثلاثة تتلاقى فى نقطة واحدة

، و بتطبيق قاعدة لامى يكون :

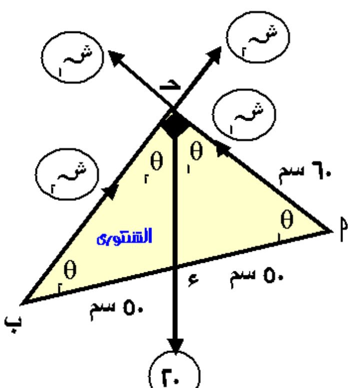
$$\frac{٣٠}{\text{حا } ١٢٠^\circ} = \frac{ر_١}{\text{حا } ٩٠^\circ} = \frac{ر_٢}{\text{حا } ١٥٠^\circ}$$

∴ $ر_١ \times \text{حا } ١٢٠^\circ = ٣٠ \times \text{حا } ٩٠^\circ$ ∴ $ر_١ = ٢٠\sqrt{٣}$ نيوتن

، $ر_٢ \times \text{حا } ١٢٠^\circ = ٣٠ \times \text{حا } ١٥٠^\circ$ ∴ $ر_٢ = ١٠\sqrt{٣}$ نيوتن

(٦) قضيب منتظم طوله ١٠٠ سم و وزنه ٢٠ نيوتن (يؤثر فى منتصفه) علق القضيب من طرفيه بخيطين خفيفين ثبت طرفاهما من نقطة فى سقف حجرة ، إذا كان الخيطان متعامدان و طول أحدهما ٦٠ سم ، أوجد مقدار الشد فى كل من الخيطين عندما يكون القضيب معلق تعليقاً حراً و فى حالة توازن

الحل



∵ الكرة متزنة تحت تأثير ثلاث قوى مستوية

∴ خطوط عمل القوى الثلاثة تتلاقى فى نقطة واحدة

و من هندسة الشكل : ب حـ = ٨٠ سم

، و بتطبيق قاعدة لامى يكون :

$$\frac{٢٠}{\text{حا } ٩٠^\circ} = \frac{ش_١}{\text{حا}(٩٠^\circ + \theta_١)} = \frac{ش_٢}{\text{حا}(٩٠^\circ + \theta_٢)}$$

$$\therefore \frac{٢٠}{١} = \frac{ش_١}{\text{حتا } \theta_١} = \frac{ش_٢}{\text{حتا } \theta_٢}$$

∴ $ش_١ = ٢٠ \times حتا\theta_١ = ٢٠ \times \frac{٦٠}{١٠٠} = ١٢$ نيوتن

، $ش_٢ = ٢٠ \times حتا\theta_٢ = ٢٠ \times \frac{٨٠}{١٠٠} = ١٦$ نيوتن

(٧) ؟ب قضيب منتظم (وزنه يؤثر فى منتصفه) مثبت بطرفه ؟ فى حائط رأسى بواسطة مفصل ، جذب القضيب أفقياً بقوة مقدارها ق ث كجم حتى اتزن القضيب فى وضع يصنع فيه زاوية قياسها ٣٠° مع الرأسى ، أوجد ق ، و رد فعل المفصل

الحل

نفرض أن : طول القضيب = ل

∵ القضيب متزن تحت تأثير ثلاث قوى مستوية

∴ خطوط عمل القوى الثلاثة تتلاقى فى نقطة واحدة

و من هندسة الشكل : ب حـ = $\frac{١}{٢}$ ل

، حـ ء = $\frac{١}{٤}$ ل ، ؟ حـ = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ل

، ؟ ء = $\frac{\sqrt{١٣}}{٤}$ ل ، المثلث ؟ حـ ء هو مثلث القوى

∴ $\frac{ق}{ء حـ} = \frac{ر}{؟ ء} = \frac{و}{؟ حـ}$

∴ ق × ؟ حـ = و × ء حـ ∴ ق × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ل = و × $\frac{١}{٤}$ ل

∴ ق = $\frac{\sqrt{٣}}{٦}$ و

∴ ر × ؟ حـ = و × ؟ ء ∴ ر × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ل = و × $\frac{\sqrt{١٣}}{٤}$ ل

∴ ر = $\frac{\sqrt{٣٩}}{٦}$ و

(٨) قضيب منتظم يرتكز فى مستوى رأسى بطرفه العلوى على حائط رأسى أملس و بطرفه السفلى على مستوى أفقى معامل الاحتكاك بينه و بين القضيب و المستوى $\frac{١}{٤}$ ، أوجد ظل الزاوية التى يصنعها القضيب مع الأفقى عندما يكون على وشك الانزلاق

الحل

نفرض أن : طول القضيب = ل

الشكل المقابل يبين القوى المؤثرة على القضيب

∵ القضيب متزن ∴ س = ٠

∴ $ر_ب - م ر_؟ = ٠$ ∴ $ر_ب = \frac{١}{٤} ر_؟$ (١)

، ص = ٠ ∴ $ر_؟ - و = ٠$

∴ $ر_؟ = و$ (٢)

∴ من (١) ، (٢) ينتج : $ر_ب = \frac{١}{٤}$ و (٣)

، $ج_؟ = ٠$ ∴ و × $\frac{١}{٢}$ل حتاθ − $ر_ب$ × ل حاθ = ٠

بالقسمة ÷ ل حتاθ ، و التعويض من (٣) ينتج : $\frac{١}{٢}$ و = $\frac{١}{٤}$ و طاθ

∴ طاθ = ٢

(٩) ؟ب سلم منتظم وزنه ١٤ ث كجم يرتكز بطرفه ؟ على أرض أفقية خشنة ، و يرتكز بطرفه ب على حائط رأسى خشن و كان معامل الاحتكاك بين السلم و الأرض $\frac{٣}{٧}$ و معامل الاحتكاك بين السلم و الحائط $\frac{١}{٣}$ فإذا أتزن السلم فى مستوى رأسى عمودى على الحائط عندما كان يميل على الأفقى بزاوية ٤٥° فأوجد مقدار أقل قوة أفقية تؤثر عند الطرف ؟ جعلت القضيب على وشك الحركة نحو الحائط

الحل

نفرض أن : طول القضيب = ل

الشكل المقابل يبين القوى المؤثرة على القضيب

∵ القضيب متزن ∴ س = ٠

∴ $ر_ب - ق + م_أ ر_أ = ٠$

∴ $ق = \frac{٣}{٧} ر_أ + ر_ب$ (١)

، ص = ٠ ∴ $ر_أ - م_ب ر_ب - ١٤ = ٠$

∴ $ر_أ = \frac{١}{٣} ر_ب + ١٤$ (٢) ، $ج_أ = ٠$

∴ $١٤ \times \frac{١}{٢} ل \text{ حتا } ٤٥^\circ - ر_ب \times ل \text{ حا } ٤٥^\circ + م_ب ر_ب \times ل \text{ حتا } ٤٥^\circ = ٠$

∴ $٧ ل \times \frac{١}{\sqrt{٢}} = ر_ب \times ل \times \frac{١}{\sqrt{٢}} - \frac{١}{٣} ر_ب \times ل \times \frac{١}{\sqrt{٢}}$

∴ $\frac{٢}{٣} ر_ب = ٧$ ∴ $ر_ب = ١٠,٥$ ث كجم (٣)

من (١) ، (٢) ، (٣) ينتج : $ق = \frac{٣}{٧} \times (\frac{١}{٣} \times ١٠,٥ + ١٤) + ١٠,٥$

ق = ١٨ ث كجم و هى القوة أفقية تجعل القضيب على وشك الحركة نحو الحائط

(١٠) أب سلم منتظم طوله ١٠ متر و وزنه ٢٠ ث كجم يرتكز بطرفه أ على أرض أفقية خشنة معامل الاحتكاك بينها و بين السلم $\frac{١}{٤}$ ، و بطرفه ب على على حائط أملس أثبت أن السلم لا يمكن أن يتزن عندما يكون الطرف ب يبعد ٨ متر من سطح الأرض

الحل

الشكل المقابل يبين القوى المؤثرة على القضيب

، من هندسة الشكل : أ و = ٦ م

بفرض أن : القضيب متزن ∴ س = ٠

∴ $ر_ب - م ر_أ = ٠$

∴ $ر_ب = \frac{١}{٤} ر_أ$ (١)

، ص = ٠ ∴ $ر_أ - ٢٠ = ٠$ ∴ $ر_أ = ٢٠$ (٢)

من (١) ، (٢) ينتج : $ر_ب = ٥$ ، $ج_أ = ٠$

، ∵ $ج_أ = ٢٠ \times ٣ - ر_ب \times ٨ = ٢٠ \times ٣ - ٥ \times ٨ = ٢٠ \neq ٠$

∴ لا يمكن أن يتزن السلم عندما يكون الطرف ب يبعد ٨ متر من سطح الأرض

(١١) أب سلم منتظم وزنه ٩ ث كجم يرتكز بطرفه أ على أرض أفقية خشنة و بطرفه ب على حائط خشن فإذا كان معاملا الاحتكاك عند أ ، ب هما $\frac{٥}{٩}$ ، $\frac{١}{٢}$ على الترتيب ثم شد الطرف أ بقوة أفقية $\overleftarrow{ق}$ جعلت السلم على وشك الانزلاق بعيداً عن الحائط و كان السلم يصنع مع الأفقى زاوية قياسها ٤٥° أوجد مقدار $\overleftarrow{ق}$

(السلم فى مستوى رأسى عمودى على الحائط)

الحل

نفرض أن : طول القضيب = ل

الشكل المقابل يبين القوى المؤثرة على القضيب

∵ القضيب متزن ∴ س = ٠

∴ $ر_ب + ق - م_أ ر_أ = ٠$

∴ $ق = \frac{٥}{٩} ر_أ - ر_ب$ (١) ، ص = ٠

∴ $ر_أ + م_ب ر_ب - ٩ = ٠$ ∴ $ر_أ + \frac{١}{٢} ر_ب = ٩$ (٢) ، $ج_أ = ٠$

∴ $٩ \times \frac{١}{٢} ل \text{ حتا } ٤٥^\circ - م_ب ر_ب \times ل \text{ حتا } ٤٥^\circ - ر_ب \times ل \text{ حا } ٤٥^\circ = ٠$

بالقسمة ÷ ل حتا ٤٥° ينتج : ∴ $\frac{٩}{٢} = \frac{١}{٢} ر_ب + ر_ب \text{ طا } ٤٥^\circ$

∴ $\frac{٩}{٢} = \frac{١}{٢} ر_ب + ر_ب \times ١$ و منها : $ر_ب = ٣$ ث كجم ، من (٢) ينتج :

∴ $ر_أ = \frac{١٥}{٢}$ ث كجم ، من (١) ينتج : $ق = \frac{١٣}{٤}$ ث كجم

اجابة أسئلة الاختبارات الخاصة بالوحدة

الاختبار الأول

السؤال الأول : أختر الاجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة

(٥) إذا اتزنت مجموعة من القوى المستوية فإن مجموع عزومها حول أى نقطة فى المستوى يساوى ....

(أ) ثابت غير صفرى　　(ب) صفر

(حـ) محصلة هذه القوى　　(ء) الواحد الصحيح

الحـــل

صفر

السؤال الرابع :

(أ) أ ب قضيب رفيع خفيف طوله ٢ ل معلق فى مستوى رأسى من طرفيه أ ، ب يميلان على الرأسى بزاويتين ٣٠° ، ٦٠° على الترتيب ، علق فى القضيب الثقلان ٢ ، ٨ نيوتن على بعد من أ يساوى ١/٥ ل ، ٦/٥ ل أوجد فى وضع التوازن مقدار الشد فى الخيطين و قياس زاوية ميل القضيب على الأفقى

الحـــل

شـ١ حا ٦٠°
شـ١
شـ١ حتا ٦٠°
٣٠°
٦٠°
١/٥ ل
أ
شـ٢ حا ٣٠°
شـ٢
٦٠°
٣٠°
٤/٥ ل
ل
شـ٢ حتا ٣٠°
ب
θ
٨
٢

∵ القضيب متزن　　∴ معادلات الاتزان هى :

شـ١ حتا ٦٠° = شـ٢ حا ٣٠°

∴ شـ١ × ١/٢ = شـ٢ × √٣/٢　　∴ شـ١ = √٣ شـ٢　　(١)

، شـ١ حا ٦٠° + شـ٢ حتا ٣٠° = ٢ + ٨

∴ شـ١ × √٣/٢ + شـ٢ × ١/٢ = ١٠　　بالتعويض من (١) ينتج :

∴ ٣/٢ شـ٢ + ١/٢ شـ٢ = ١٠　　∴ ٢ شـ٢ = ١٠

∴ شـ٢ = ٥ وحدة وزن

، بالتعويض فى (١) ينتج : شـ١ = ٥ √٣ وحدة وزن

، بفرض أن القضيب يميل على الأفقى بزاوية قياسها θ

، ∵ جـب = ٠

∴ شـ١ حا ٦٠° × ٢ ل حتا θ − شـ١ حتا ٦٠° × ٢ ل حا θ

− ٢ × (ل + ٤/٥ ل) حتا θ − ٨ × ٤/٥ ل حتا θ = ٠

∴ ٥ √٣ × √٣/٢ × ٢ ل حتا θ − ٥ √٣ × ١/٢ × ٢ ل حا θ

− ٢ × ٩/٥ ل حتا θ − ٨ × ٤/٥ ل حتا θ = ٠

، بالقسمة ÷ ل حتا θ ينتج :

١٥ − ٥ √٣ طا θ − ١٨/٥ − ٣٢/٥ = ٠

∴ ٥ √٣ طا θ = ٥　　∴ طا θ = ١/√٣　　∴ θ = ٣٠°

الاختبار الثانى

السؤال الأول : أختر الاجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة

(٥) فى الشكل المقابل :

إذا كانت ل هى زاوية الاحتكاك بين الأرض و القضيب

فإن : طا هـ . طا ل = ...

(أ) ٢   (ب) $\frac{1}{2}$

(جـ) ١   (د) ٣

الحل

∵ القضيب متزن

∴ $ر_أ$ = و (١) ، $ر_ب$ = م $ر_أ$ = طا ل $ر_أ$ = و طا ل (٢)

و بفرض أن : طول القضيب = س وحدة طول

، ∵ $ج_أ$ = ٠ ∴ و × $\frac{1}{2}$ س حتا هـ − $ر_ب$ × س حا هـ = ٠

و بالقسمة على س حتا هـ ينتج : و = ٢ $ر_ب$ طا هـ ∴ من (٢) ينتج :

و = ٢ و طا ل . طا هـ ، ومنها ينتج : طا هـ . طا ل = $\frac{1}{2}$

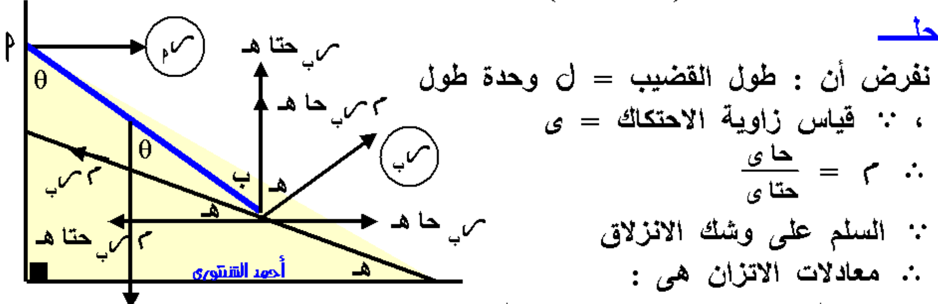
السؤال الرابع :

(أ) فى الشكل المقابل :

ترتكز احدى نهايتى سلم منتظم وزنه (و) على حائط رأسى أملس و ترتكز النهاية الأخرى على أرض خشنة تميل على الأفقى بزاوية قياسها (هـ) لأعلى فإذا كان السلم على وشك الانزلاق و هو فى مستوى رأسى عمودى على على خط تقاطع الحائط مع الأرض

اثبت أن السلم يميل على الرأسى بزاوية قياسها θ حيث :

طا θ = ٢ طا (ى − هـ) حيث ى زاوية الاحتكاك



الحل

نفرض أن : طول القضيب = ل وحدة طول

، ∵ قياس زاوية الاحتكاك = ى

∴ م = $\frac{حا ى}{حتا ى}$

∵ السلم على وشك الانزلاق

∴ معادلات الاتزان هى :

$ر_ب$ حا هـ + $ر_أ$ = م $ر_ب$ حتا هـ

∴ $ر_ب$ حا هـ + $ر_أ$ = $\frac{حا ى}{حتا ى}$ × $ر_ب$ حتا هـ   بالضرب × حتا ى ينتج :

$ر_أ$ حتا ى = $ر_ب$ حا ى حتا هـ − $ر_ب$ حتا ى حا هـ

∴ $ر_أ$ حتا ى = $ر_ب$ حا (ى − هـ)   (١)

، و = $ر_ب$ حتا هـ + م $ر_ب$ حا هـ

∴ و = $ر_ب$ حتا هـ + $\frac{حا ى}{حتا ى}$ × $ر_ب$ حا هـ   بالضرب × حتا ى ينتج :

و حتا ى = $ر_ب$ حتا ى حتا هـ − $ر_ب$ حا هـ حا ى

∴ و حتا ى = $ر_ب$ حتا (ى − هـ)   (٢)

، $ج_ب$ = ٠

∴ و × $\frac{1}{2}$ ل حا θ − $ر_أ$ × ل حتا θ = ٠   بالقسمة ÷ ل حتا θ ينتج :

و طا θ = ٢ $ر_أ$ بالضرب × حتا ى ينتج :

و حتا ى طا θ = ٢ $ر_أ$ حتا ى   بالتعويض من (١) ، (٢) ينتج :

$ر_ب$ حتا (ى − هـ) طا θ = ٢ $ر_ب$ حا (ى − هـ)

بالقسمة ÷ $ر_ب$ حتا (ى − هـ) ينتج :

طا θ = ٢ طا (ى − هـ)

الاختبار الثالث

السؤال الأول : أختر الاجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة

(٥) عندما يوضع قضيب داخل أناء كروى أملس فإنه يتزن عندما يمر خط عمل الوزن ....

الحل

بمركز الأناء (الكرة)

السؤال الرابع :

(أ) أ ب قضيب منتظم وزنه (و) يرتكز باحدى طرفيه أ على أرض أفقية ملساء و بطرفه الآخر ب على مستوى أملس يميل على الأفقى بزاوية قياسها يساوى ضعف قياس زاوية ميل القضيب على الأفقى فى وضع الاتزان حفظ اتزان القضيب بواسطة خيط مربوط فى طرف المستند على الأرض الأفقية و الطرف الآخر للخيط فى نقطة على خط تقاطع المستوى المائل مع المستوى الأفقى اوجد مقدار الشد فى الخيط و ردى الفعل عند طرفى القضيب عندما يميل القضيب على الأفقى بزاوية قياسها ٣٠°

الحل

نفرض أن : طول القضيب = ل وحدة طول

، ∵ القضيب متزن

∴ ش = ر~ب~ حتا ٣٠° = $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ر~ب~ (١)

، ر~أ~ + ر~ب~ حا ٣٠° = و

∴ ر~أ~ + $\frac{1}{2}$ ر~ب~ = و (٢)

، ع~أ~ = ٠

∴ و × $\frac{1}{2}$ ل حتا ٣٠° = ر~ب~ حتا ٣٠° × ل حا ٣٠° + ر~ب~ حا ٣٠° × ل حتا ٣٠°

بالقسمة على ل حتا ٣٠° ينتج : $\frac{1}{2}$ و = $\frac{1}{2}$ ر~ب~ + $\frac{1}{2}$ ر~ب~

∴ ر~ب~ = $\frac{1}{2}$ و　　　بالتعويض من (٢) ينتج :

ر~أ~ + $\frac{1}{4}$ و = و　　　و منها : ر~أ~ = $\frac{3}{4}$ و

، بالتعويض من (١) ينتج : ش = $\frac{\sqrt{3}}{4}$ و

الاختبار الرابع

السؤال الأول : أختر الاجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة

(٥) فى الشكل المقابل :

إذا كان القضيب على وشك الانزلاق فإن :

ر~١~ = ...　　،　　ر~٢~ = ...

(أ) ٢ و　　　(ب) $\frac{1}{2}$ و

(حـ) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ و　　　(ء) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ و

الحل

∵ القضيب متزن

∴ ر حا ٦٠° + ر١ = و

∴ $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ر حا ٦٠° + ر١ = و (١)

، ر٢ = ر حتا ٦٠°

∴ ر٢ = $\frac{1}{2}$ ر (٢)

، جـ ا = ٠

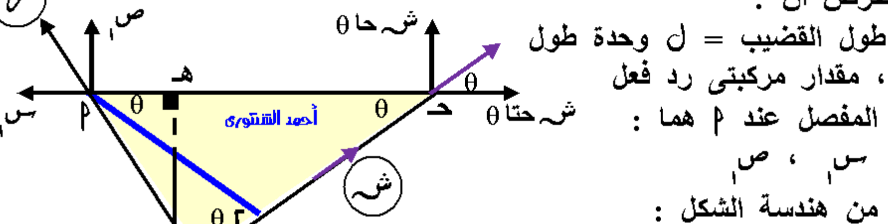
∴ ر حا ٦٠° × ٣ ل حتا ٣٠° + ر حتا ٦٠° × ٣ ل حا ٣٠° − و × ٢ ل حا ٣٠° = ٠   و منها : ر = $\frac{\sqrt{3}}{3}$ و

بالتعويض فى (١) ينتج : ر١ = $\frac{1}{2}$ و

السؤال الرابع :

(١) ا ب قضيب منتظم طرفه ا مثبت فى مفصل فى حائط رأسى و طرفه الآخر ب مربوط بأحد طرفى خيط ، و ربط الطرف الآخر للخيط فى نقطة فى المستوى الأفقى المار بالمفصل بحيث يميل كل من القضيب و الخيط على الأفقى بنفس الزاوية θ فإذا كان (و) وزن القضيب ، بين أن رد فعل المفصل عند ا يساوى $\frac{1}{4}$ و $\sqrt{٨ + قتا^2 θ}$

الحل



نفرض أن :

طول القضيب = ل وحدة طول

، مقدار مركبتى رد فعل المفصل عند ا هما : س١ ، ص١

من هندسة الشكل :

ا ء = ا ب حا ٢θ = ٢ ل حا θ حتا θ

∴ ا حـ = ا ء قتا θ = ٢ ل حا θ حتا θ قتا θ

= ٢ ل حتا θ   ،   ا هـ = $\frac{1}{2}$ ل حتا θ

∴ معادلات الاتزان هى :

س١ = ش حتا θ (١)   ص١ = و − ش حا θ (٢)

، جـ ا = ٠   ∴ ش حا θ × ا حـ − و × ا هـ = ٠

∴ ش حا θ × ٢ ل حتا θ − و × $\frac{1}{2}$ ل حتا θ = ٠

و منها : ش = $\frac{1}{4}$ و قتا θ   ، بالتعويض فى (١) ، (٢) ينتج :

س١ = $\frac{1}{4}$ و طتا θ   ،   ص١ = $\frac{3}{4}$ و

∴ $(ر)^2 = (س_1)^2 + (ص_1)^2 = \frac{1}{16} و^2 طتا^2 θ + \frac{9}{16} و^2$

$= \frac{1}{16} و^2 (طتا^2 θ + ٩) = \frac{1}{16} و^2 (طتا^2 θ + ١ + ٨)$

$= \frac{1}{16} و^2 (قتا^2 θ + ٨)$ ∴ ر = $\frac{1}{4}$ و $\sqrt{٨ + قتا^2 θ}$

الاختبار الخامس

السؤال الأول : أختر الاجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة

(٥) الشرط اللازم و الكافى لاتزان مجموعة من القوى المستوية هو ....

الحل

ينعدم متجه مجموع القوى ، ينعدم عزم المجموعة بالنسبة لنقطة واحدة

السؤال الرابع :

(أ) أ ب سلم منتظم طوله ٥ متر و وزنه ٢٠ ث كجم يستند بطرفه أ على حائط رأسى أملس و بطرفه ب على أرض أفقية خشنة معامل الاحتكاك بينهما $\frac{1}{4}$ ، و كان الطرف ب على بعد ٣ متر من الحائط ، اثبت أن السلم لا يمكن أن يتزن في هذه الحالة ثم اوجد أصغر وزن لجسم معامل الاحتكاك بينه و بين الأرض $\frac{1}{5}$ بحيث إذا وضع عند الطرف ب للسلم يمنعه من الانزلاق

الحل

من هندسة الشكل : أ حـ = ٣ سم

بفرض أن السلم متزن :

∴ ر$_{أ}$ = ح ، ر$_{ب}$ = ٢٠

، ع$_{ب}$ = ٠

∴ ٢٠ × ١,٥ − ر$_{أ}$ × ٤ = ٠

و منها : ر$_{أ}$ = ٧,٥

∴ ح = ٧,٥

∵ مقدار ح$_{س}$ عند ب = م ر$_{ب}$ = $\frac{1}{4}$ × ٢٠ = ٥

∴ ح > ح$_{س}$ و بالتالى لا يمكن أن يتزن السلم فى هذه الحالة

بعد وضع الجسم الذى وزنه (و) عند ب

بالنسبة للجسم :

ض = $\frac{1}{5}$ ر

، و = ر

∴ ض = $\frac{1}{5}$ و

بالنسبة للسلم :

ر$_{أ}$ = $\frac{1}{4}$ ر$_{ب}$ + $\frac{1}{5}$ و ، ر$_{ب}$ = ٢٠

، ع$_{ب}$ = ٠

∴ ٢٠ × ١,٥ − ر$_{أ}$ × ٤ = ٠

∴ ر$_{أ}$ = ٧,٥

∴ ٧,٥ = $\frac{1}{4}$ × ٢٠ + $\frac{1}{5}$ و

و منها : و = ١٢,٥ ث كجم







المتميز

فى
الرياضيات التطبيقية
الأستاتيكا

الجزء النظرى
و
حلول التمارين
الوحدة الخامسة

$م_{س}$ ر	$ج_{و}$	($س_{م}$ ، $ص_{م}$)	$\|\overrightarrow{ق}\|$

إعداد : أحمد الشنتورى

الصف الثالث الثانوى
القسم العلمى
شعبة الرياضيات

٢٠١٧ / ٢٠١٨

الوحدة الخامسة .... الازدواجات

٥ – ١ الازدواجات

الازدواج :

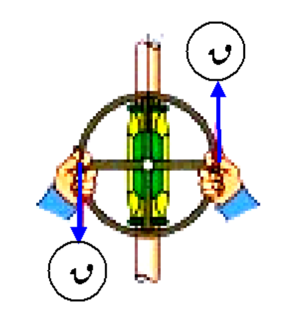
تعريف : الازدواج :

هو نظام من القوى يتكون من قوتين

١) متساويتين فى المعيار

٢) متضادتين فى الاتجاه

٣) لا يجمعهما خط عمل واحد



عزم الازدواج :

يعرف عزم الازدواج بأنه مجموع عزوم قوتى الازدواج حول أى نقطة فى الفراغ

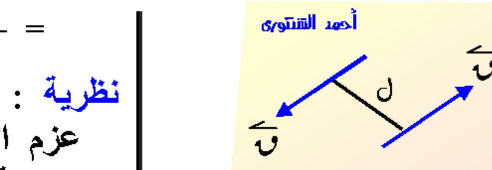
و معياره يساوى حاصل ضرب معيار إحدى القوتين فى البعد بينهما

و يرمز له بالرمز $\text{ع} = \| \overrightarrow{\text{ع}} \|$

$\therefore \| \overrightarrow{\text{ع}} \| = \text{ق} \times \text{ل}$ حيث :

$\text{ق} = \| \overrightarrow{\text{ق}} \|$ ، ل يسمى ذراع الازدواج

أى أن : معيار عزم الازدواج = معيار إحدى قوتيه × ذراع الازدواج



اتجاه الازدواج :

يتحدد اتجاه الازدواج وفقاً لقاعدة اليد اليمنى

و تكون إشارة القياس الجبرى لعزم الازدواج موجبة إذا كانت قوتاه تعملان على الدوران ضد اتجاه حركة عقارب الساعة

أى أن : $\text{ع} = \text{ق} \times \text{ل}$

و تكون إشارة القياس الجبرى لعزم الازدواج سالبة إذا كانت قوتاه تعملان على الدوران مع اتجاه حركة عقارب الساعة

أى أن : $\text{ع} = - \text{ق} \times \text{ل}$

إجابة حاول أن تحل (أ) صفحة ٧٩

أوجد القياس الجبرى لعزم الازدواج فى الشكل المقابل

الحل

ل (ذراع الازدواج) = ١٠٠ جا ٤٥° = $١٠٠ \times \frac{١}{\sqrt{٢}}$

= $٥٠ \sqrt{٢}$ سم

∴ ع (القياس الجبرى لعزم الازدواج)

= $- ٧٠ \times ٥٠ \sqrt{٢}$

= $- ٣٥٠٠ \sqrt{٢}$ نيوتن . سم

نظرية :

عزم الازدواج هو قيمة ثابتة ، لا تعتمد على النقطة التى تنسب إليها عزم قوتيه

ففى الشكل المقابل :

القوتان $\overrightarrow{\text{ق}}$ ، $-\overrightarrow{\text{ق}}$ تؤثران فى النقطتين أ ، ب ، نقطة (و) نقطة عامة فى الفراغ فيكون مجموع عزوم القوى حول نقطة (و) :

$\overrightarrow{\text{ع}} = \overrightarrow{\text{و أ}} \times \overrightarrow{\text{ق}} + \overrightarrow{\text{و ب}} \times - \overrightarrow{\text{ق}} = (\overrightarrow{\text{و أ}} - \overrightarrow{\text{و ب}}) \times \overrightarrow{\text{ق}}$

$= \overrightarrow{\text{ب أ}} \times \overrightarrow{\text{ق}}$

أى أن : عزم الازدواج لا يعتمد على موضع نقطة (و) التى تنسب العزوم إليها

إجابة حاول أن تحل (٢) صفحة ٨٠

إذا كان $\overrightarrow{ق_١}$ ، $\overrightarrow{ق_٢}$ قوتى ازدواج بحيث : $\overrightarrow{ق_١} = -٣\overrightarrow{س} + ٢\overrightarrow{ص}$ تؤثر فى النقطة ⍺ (١، ١) ، $\overrightarrow{ق_٢}$ تؤثر فى النقطة ب (−١ ، −٢) أوجد $\overrightarrow{ق_٢}$ ثم أوجد عزم الازدواج و كذلك طول العمود المرسوم من ⍺ على خط عمل $\overrightarrow{ق_٢}$

الحل

∵ القوتان تكونان ازدواجاً ∴ $\overrightarrow{ق_٢} = -\overrightarrow{ق_١} = ٣\overrightarrow{س} - ٢\overrightarrow{ص}$

، عزم الازدواج = عزم $\overrightarrow{ق_١}$ حول ب = $\overrightarrow{ب⍺} \times \overrightarrow{ق_١}$

= [(١،١) − (−١ ، −٢)] × (−٣ ، ٢)

= (٢ ، −١) × (−٣ ، −٢) = ١٣ $\overrightarrow{ع}$

∴ ‖$\overrightarrow{ج}$‖ = ١٣ ، ∵ ‖$\overrightarrow{ق_١}$‖ = $\sqrt{٩ + ٤}$ = $\sqrt{١٣}$

∴ البعد العمودى بين خطى عمل القوتين = $\frac{‖\overrightarrow{ج}‖}{‖\overrightarrow{ق_١}‖} = \frac{١٣}{\sqrt{١٣}}$

= $\sqrt{١٣}$ وحدة طول

اتزان جسم متماسك تحت تأثير ازدواجين أو أكثر :

تعريف : يقال لجسم متماسك أنه متزن تحت تأثير ازدواجين مستويين إذا كان مجموع عزميهما هو المتجه الصفرى

إذا كان : $\overrightarrow{ج_١}$ ، $\overrightarrow{ج_٢}$ عزمى الازدواجين فإن شرط اتزان الجسم تحت تأثير ازدواجين هو : $\overrightarrow{ج_١} + \overrightarrow{ج_٢} = \overrightarrow{و}$

أى أن : شرط توازن جسم متماسك تحت تأثير ازدواجين مستويين (شرط توازن ازدواجين) القياسان الجبريان لمتجهى عزميهما ج١ ، ج٢ هو : ج١ + ج٢ = ٠ أى : ج١ = − ج٢

و بصفة عامة : إذا أثر على عدة ازدواجات مستوية عزومها : $\overrightarrow{ج_١}$ ، $\overrightarrow{ج_٢}$ ، .... ، $\overrightarrow{ج_ن}$ فإن شرط توازن الجسم تحت تأثير هذه الازدواجات هو : $\overrightarrow{ج_١} + \overrightarrow{ج_٢} + ... + \overrightarrow{ج_ن} = \overrightarrow{و}$

نتيجة :

يتزن الجسم تحت تأثير ازدواجين مستويين أو أكثر إذا انعدم مجموع القياسات الجبرية لعزوم الازدواجات

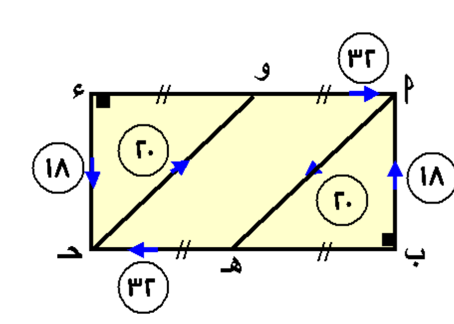
ملاحظة :

الازدواج لا يتزن إلا مع ازدواج آخر

إجابة حاول أن تحل (٣) صفحة ٨١

فى الشكل المقابل :

⍺ ب حـ ء مستطيل ، هـ ، و منتصفات $\overline{ب حـ}$ ، $\overline{⍺ ء}$ على الترتيب ، ⍺ ب = ٦ سم ، ب حـ = ١٦ سم فإذا كانت القوى المؤثرة بالنيوتن و مقاديرها و



اتجاهاتها كما بالشكل أثبت أن القوى متزنة

الحل

من هندسة الشكل : أ حـ = ١٠ سم

، ل = أ و حا θ = ٨ حا (٩٠° − β)

= ٨ حتا β = ٨ × $\frac{٦}{١٠}$ = ٤,٨ سم

القوتان (١٨ ، ١٨) تكونان ازدواجاً قياسه الجبرى $ج_١$ = ١٨ × ١٦ = ٢٨٨ نيوتن . سم

القوتان (٣٢ ، ٣٢) تكونان ازدواجاً قياسه الجبرى $ج_٢$ = − ٣٢ × ٦

= − ١٩٢ نيوتن . سم

القوتان (٢٠ ، ٢٠) تكونان ازدواجاً قياسه الجبرى $ج_٣$ = − ٢٠ × ٤,٨

= − ٩٦ نيوتن . سم

∴ ج = $ج_١$ + $ج_٢$ + $ج_٣$ = ٢٨٨ − ١٩٢ − ٩٦ = ٠ ∴ المجموعة متزنة

إجابة حاول أن تحل (٤) صفحة ٨١

أ ب حـ ء هـ و سداسى منتظم أثرت القوى ٣ ، ٩ ، $ق_١$ ، ٣ ، ٩ ، $ق_٢$ فى الاتجاهات $\overrightarrow{أب}$ ، $\overrightarrow{ءحـ}$ ، $\overrightarrow{ءهـ}$ ، $\overrightarrow{هـو}$ ، $\overrightarrow{أو}$ على الترتيب أوجد $ق_١$ ، $ق_٢$ لكى تتزن المجموعة

الحل

بفرض أن : طول ضلع السداسى المنتظم = ل

من هندسة الشكل : ب ء = ب و = و ء

= $\sqrt{٣}$ ل سم

القوتان (٣ ، ٣) تكونان ازدواجاً قياسه الجبرى

$ج_١$ = − ٣ × $\sqrt{٣}$ ل = − ٣$\sqrt{٣}$ ل نيوتن . سم

القوتان (٩ ، ٩) تكونان ازدواجاً قياسه الجبرى

$ج_٢$ = − ٩ × $\sqrt{٣}$ ل = − ٩$\sqrt{٣}$ ل نيوتن . سم

القوتان ($ق_١$ ، $ق_٢$) تكونان ازدواجاً قياسه الجبرى $ج_٣$

= $ق_١$ × $\sqrt{٣}$ ل = $ق_١$ $\sqrt{٣}$ ل نيوتن . سم " حيث : $ق_١$ = $ق_٢$ "

، ∵ المجموعة متزنة ∴ $ج_١$ + $ج_٢$ + $ج_٣$ = ٠

∴ − ١٢ $\sqrt{٣}$ ل + $ق_١$ $\sqrt{٣}$ ل = ٠ ∴ $ق_١$ = $ق_٢$ = ١٢ نيوتن

إجابة حاول أن تحل (٥) صفحة ٨٢

قضيب طوله ٤٠ سم و وزنه ٢,٤ ث كجم يؤثر عند منتصفه ، يمكنه الدوران بسهولة فى مستوى رأسى حول مفصل ثابت عند طرفه ، أثر على القضيب ازدواج معيار عزمه ٢٤ ث كجم . سم و اتجاهه عمودى على المستوى الرأسى الذى يمكن للقضيب الدوران فيه ، عين مقدار و اتجاه رد فعل المفصل و زاوية ميل القضيب على الرأسى فى وضع الاتزان

الحل

∵ القضيب متزن تحت تأثير الازدواج :

$ج_١$ = ٢٤ ث كجم . سم و القوتين (٢,٤ ، ر)

و بفرض أن الازدواج يعمل فى اتجاه عكس دوران عقارب الساعة ، ∵ الازدواج لا يتزن إلا مع ازدواج مثله

∴ القوتان (٢,٤ ، ر) تكونان ازدواجاً

∴ ر = ٢,٤ ث كجم

، ∵ ٢,٤ يؤثر رأسياً لأسفل ∴ ر يؤثر رأسياً لأعلى

، القياس الجبرى لعزمهما = $ج_٢$ = − ٢,٤ × حـ ء = − ٢,٤ × أ ء حا θ

= − ٢,٤ × ٢٠ × حا θ = − ٤٨ حا θ

∴ $ج_١$ + $ج_٢$ = ٠ ∴ ٢٤ − ٤٨ حا θ = ٠

∴ حا θ = $\frac{١}{٢}$ ∴ θ = ٣٠° أ، ١٥٠°

تكافؤ ازدواجين :

تعريف : يقال لازدواجين مستويين أنهما متكافئان إذا تساوى القياسان الجبريان لمتجهى عزميهما

أى أن : الازدواجان المستويان $\overline{ج_1}$ ، $\overline{ج_2}$ يتكافأن إذا كان : $\overline{ج_1} = \overline{ج_2}$

ملاحظة : الازدواج لا يكافئ إلا ازدواج آخر

إجابة حاول أن تحل (٦) صفحة ٨٣

ﻫ ب قضيب خفيف طوله ٥٠ سم ، تؤثر قوتان مقدار كل منهما ٣٠ نيوتن فى ﻫ ، ب فى اتجاهين متضادين و عمودتين على القضيب ، و أثرت قوتان أخريان قوتان مقدار كل منهما ١٠٠ نيوتن فى اتجاهين متضادين فى نقطتين حـ ، ء من القضيب حيث حـ ء = ٣٠ سم بحيث يكونان ازدواجاً يكافئ الازدواج المكون من القوتين الأوليين ، أوجد قياس ميل القوتين الأخريين على القضيب

الحل

القوتان (٣٠ ، ٣٠) تكونان ازدواجاً قياسه الجبرى $ج_1 = ٣٠ \times ٥٠ = ١٥٠٠$ نيوتن . سم

القوتان (١٠٠ ، ١٠٠) تكونان ازدواجاً قياسه الجبرى $ج_2 = ١٠٠ \times ٣٠$ حا θ

، ∵ $ج_1$ ، $ج_2$ متكافئان ∴ $ج_1 = ج_2$

∴ ١٠٠×٣٠ حا θ $= ١٥٠٠$ ∴ حا θ $= \frac{1}{2}$ ∴ θ $= ٣٠°$ أو ١٥٠°

حل تمارين (١ – ١) صفحة ١٣٥ بالكتاب المدرسى

اختر الاجابة الصحيحة من بين الاجابات المعطاة

(١) الازدواج هو :

(ﻫ) قوتان متوازيان و متساويتان فى المقدار و متحدتا الاتجاه
(ب) قوتان متعامدتان و متساويتان فى المقدار
(حـ) قوتان متوازيان و متساويتان فى المقدار و على خط عمل واحد
(ء) قوتان متوازيان و متساويتان فى المقدار و متضادتان فى الاتجاه و ليستا على خط عمل واحد

(٢) أى من الشروط الآتية لا تغير من تأثير الازدواج على الجسم

(ﻫ) ازاحة ازدواج إلى موضع جديد فى مستواه
(ب) ازاحة ازدواج إلى مستوى آخر يوازى مستواه
(حـ) دوران ازدواج فى نفس مستواه
(ء) كل ما سبق

(٣) القوتان المؤثرتان على عجلة قيادة السيارة و تحدثان دوراناً لعجلة القيادة تكونان

(ﻫ) احتكاكاً (ب) ازدواجاً
(حـ) قوة عمودية على عجلة القيدة (ء) محصلة غير صفرية

(٤) لاحداث ازدواج من قوتين يجب أن تكون القوتان

(ﻫ) متساويتين فى المقدار (ب) متضادين فى الاتجاه
(حـ) ليستا على خط عمل واحد (ء) كل ما سبق

(٥) إذا كان $ج_1$ ، $ج_2$ هما القياسان الجبريان لعزمى ازدواجين و كان $ج_1 + ج_2 = ٠$ فإن

(ﻫ) الازدواجان متكافئان (ب) الازدواجان غير متزنيين
(حـ) الازدواجان متزنان (ء) الازدواجان يكافئان قوة

(٦) حاصل ضرب معيار احدى قوتى الازدواج فى ذراع الازدواج يسمى

(أ) محصلة الازدواج (ب) عزم الازدواج

(حـ) عزم احدى قوتى الازدواج (ء) لا شئ ما سبق

(٧) إذا كان $\overrightarrow{ق_1}$ = ٣ $\overrightarrow{س}$ – ب $\overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ق_2}$ = أ $\overrightarrow{س}$ – ٥ $\overrightarrow{ص}$ تكونان ازدواجاً فإن (أ ، ب) =

(أ) (–٣ ، –٤) (ب) (٣ ، ٥)

(حـ) (–٣ ، ٥) (ء) (–٣ ، –٥)

(٨) إذا كان ازدواج معيار عزمه ٣٥٠ نيوتن . م و معيار احدى قوتيه ٧٠ نيوتن فإن طول ذراع عزم الازدواج يساوى

(أ) ٥٠ متراً (ب) ٥ أمتار (حـ) ٥ سم (ء) ٢٤٥٠٠ سم

الحل

(١) قوتان متوازيان و متساويتان فى المقدار و متضادتان فى الاتجاه و ليستا على خط عمل واحد

(٢) كل ما سبق

(٣) ازدواجاً

(٤) كل ما سبق

(٥) الازدواجان متزنان

(٦) عزم الازدواج

(٧) ∵ القوتان تكونان ازدواجاً ∴ $\overrightarrow{ق_2}$ = – $\overrightarrow{ق_1}$

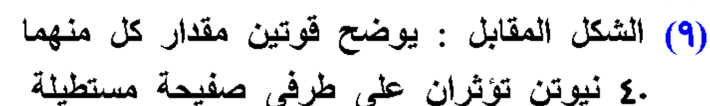
∴ ٣ $\overrightarrow{س}$ – ب $\overrightarrow{ص}$ = – (أ $\overrightarrow{س}$ – ٥ $\overrightarrow{ص}$)

∴ أ = –٣ ، ب = –٥ ∴ (أ ، ب) = (–٣ ، –٥)

(٨) ∵ ٣٥٠ = ٧٠ × ل ∴ ل = ٥ أمتار

أى أن : طول ذراع الازدواج = ٥ أمتار

أجب عن الأسئلة الآتية :



(٩) الشكل المقابل : يوضح قوتين مقدار كل منهما ٤٠ نيوتن تؤثران على طرفى صفيحة مستطيلة الشكل أبعادها س ، ص سم أوجد عزم ازدواج القوتين فى كل من الحالات الآتية :

(أ) س = ٣ سم ، ص = ٤ سم ، θ = صفر°

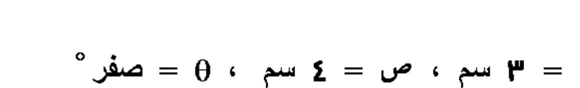
(ب) س = ص = ٦ سم ، $\theta = \frac{1}{4}\pi$

(حـ) س = ٠ ، ص = ٥ سم ، θ = ٣٠°

(ء) س = ٦ سم ، ص = ٠ ، θ = ٦٠°

(هـ) س = ٥ سم ، ص = ١٢ سم ، ظا $\theta = \frac{5}{12}$

الحل



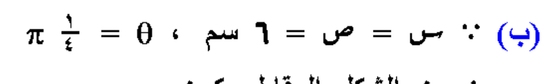
(أ) ∵ س = ٣ سم ، ص = ٤ سم ، θ = صفر°

∴ من الشكل المقابل يكون :

ع = ٤٠ × ٤

= ١٦٠ نيوتن . سم





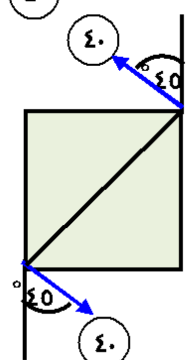
(ب) ∵ س = ص = ٦ سم ، $\theta = \frac{1}{4}\pi$

∴ من الشكل المقابل يكون :

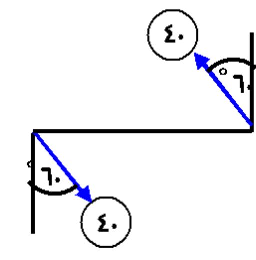
الشكل مربع طول قطره = ٦ $\sqrt{2}$ سم

∴ ع = ٤٠ × ٦ $\sqrt{2}$

= ٢٤٠ $\sqrt{2}$ نيوتن . سم

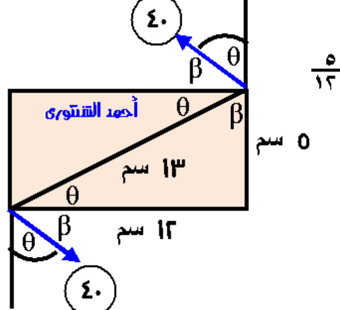


(حـ) ∵ س = ٠ ، ص = ٥ سم ، θ = ٣٠°
∴ من الشكل المقابل يكون :
ع = ٤٠ × ٥ حا ٦٠°
= ٢٠٠ × $\frac{\sqrt{3}}{2}$
= ١٠٠ $\sqrt{3}$ نيوتن . سم

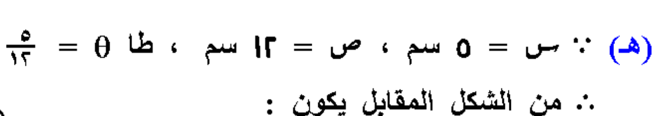


(ء) ∵ س = ٦ سم ، ص = ٠ ، θ = ٦٠°
∴ من الشكل المقابل يكون :
ع = ٤٠ × ٦ حا ٦٠°
= ٢٤٠ × $\frac{\sqrt{3}}{2}$ = ١٢٠ $\sqrt{3}$ نيوتن . سم

(هـ) ∵ س = ٥ سم ، ص = ١٢ سم ، طا θ = $\frac{5}{12}$
∴ من الشكل المقابل يكون :
θ + β = ٦٠°
، ع = ٤٠ × ١٣ = ٥٢٠ نيوتن . سم

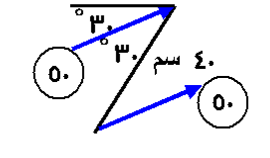


(١٠) الشكل المقابل :
يوضح قوتين معيار كل منهما ٥٠ نيوتن تؤثران على رافعة ٩ ب
أوجد القياس الجبرى لعزم الازدواج بطريقتين :
(٩) باستخدام البعد العمودى بين القوتين
(ب) بايجاد مجموع عزوم القوتين بالنسبة لنقطة ٩

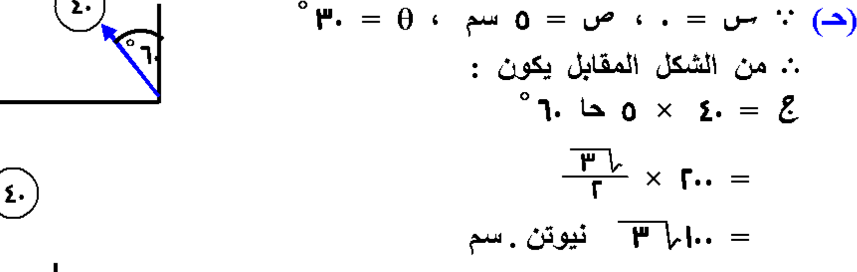


الحل

(٩) من هندسة الشكل :
البعد العمودى = ٤٠ حا ٣٠° = ٤٠ × $\frac{1}{2}$ = ٢٠ سم
∴ ع = − ٥٠ × ٢٠ = − ١٠٠٠ نيوتن . سم



(ب) من الشكل المقابل :
$ع_٩$ = ٥٠ × ٦٠ حا ٣٠° − ٥٠ × ١٠٠ حا ٣٠°
= ٣٠٠٠ × $\frac{1}{2}$ − ٥٠٠٠ × $\frac{1}{2}$
= ١٥٠٠ − ٢٥٠٠ = − ١٠٠٠ نيوتن . سم



(١١) أثرت القوتان (٣ س − ٥ ص) ، (− ٣ س + ٥ ص) نيوتن فى النقطتين ٩ ، ب على الترتيب ، متجها موضعهما (٦ س + ص) ، (٤ س + ص) متر
برهن أن المجموعة تكافئ ازدواجاً و أوجد عزمه

الحل

بفرض أن : $ق_١$ = (٣ ، − ٥) ، و هى تؤثر فى نقطة ٩ (٦ ، ١)
، $ق_٢$ = (− ٣ ، ٥) ، و هى تؤثر فى نقطة ب (٤ ، ١)
∴ $ق_٢$ = − $ق_١$ (١)   ، ∵ ب٩ = (٦ ، ١) − (٦ ، ١) = (٢ ، ٠)
، $ع_ب$ = ب٩ × $ق_١$ = (٢ ، ٠) × (٣ ، − ٥) = − ١٠ ع   (٢)
∴ من (١) ، (٢) ينتج : المجموعة تكافئ ازدواجاً عزمه = − ١٠ ع

(١٢) أثرت القوتان (٩ س − ب ص) ، (٥ س − ٢ ص) نيوتن فى النقطتين حـ ، ء على الترتيب حيث حـ (− ٢ ، ١) ، ء (٣ ، ١) فإذا كانت القوتان تكونان ازدواجاً ، أوجد قيمة

كل من أ ، ب ثم أوجد عزم الازدواج و أوجد أيضاً البعد العمودى بين خطى عمل القوتين

الحل

بفرض أن : $\overrightarrow{ق_1}$ = (أ ، ب) ، و هى تؤثر فى نقطة حـ (−٢ ، ١)

، $\overrightarrow{ق_2}$ = (٥ ، −٢) ، و هى تؤثر فى نقطة ء (٣ ، ١)

، ∵ القوتان تكونان ازدواجاً ∴ $\overrightarrow{ق_1}$ = − $\overrightarrow{ق_2}$

∴ (أ ، ب) = − (٥ ، −٢) = (−٥ ، ٢) ∴ أ = −٥ ، ب = ٢

، ∵ $\overrightarrow{ء حـ}$ = (−٢ ، ١) − (٣ ، ١) = (−٥ ، ٠)

، $\overrightarrow{ج}$ = $\overrightarrow{ء حـ}$ × $\overrightarrow{ق_1}$ = (−٥ ، ٠) × (−٥ ، ٢) = −١٠ $\overrightarrow{ع}$

∴ || $\overrightarrow{ج}$ || = ١٠ ، ∵ || $\overrightarrow{ق_1}$ || = $\sqrt{٢٥ + ٤}$ = $\sqrt{٢٩}$

∴ البعد العمودى بين خطى عمل القوتين = $\frac{|| \overrightarrow{ج} ||}{|| \overrightarrow{ق} ||}$ = $\frac{١٠}{\sqrt{٢٩}}$

= $\frac{١٠}{٢٩}\sqrt{٢٩}$ وحدة طول

(١٣) الشكل المقابل : يمثل قضيباً متزناً تحت تأثير أربع قوى أوجد قيمة ق

الحل

القوتان (١٠ ، ١٠) تكونان ازدواجاً قياسه الجبرى $ج_1$ = ١٠ × ٦ حا ٣٠° = ٦٠ × $\frac{١}{٢}$ = ٣٠ نيوتن . سم

القوتان (ق ، ق) تكونان ازدواجاً قياسه الجبرى $ج_2$ = ق × ٥ = ٥ ق نيوتن . سم

، ∵ القضيب متزن ∴ ٥ ق = ٣٠

∴ ق = ٦ نيوتن ∴ القوتان هما : ٦ ، ٦ نيوتن

(١٤) أ ب حـ ء مستطيل فيه أ ب = ٨ سم ، ب حـ = ٦ سم ، س ، ص ، ع ، ل منتصفات الأضلاع $\overline{أ ب}$ ، $\overline{ب حـ}$ ، $\overline{حـ ء}$ ، $\overline{ء أ}$ على الترتيب أثرت القوى التى مقاديرها ق ، ق ، ق ، ق ، ٦ ، ٦ نيوتن فى اتجاهات $\overleftarrow{أ س}$ ، $\overleftarrow{حـ ع}$ ، $\overleftarrow{ص س}$ ، $\overleftarrow{ل ع}$ ، $\overleftarrow{حـ ص}$ ، $\overleftarrow{أ ل}$ على الترتيب إذا أتزن المستطيل أوجد قيمة ق

الحل

القوتان (٦ ، ٦) تكونان ازدواجاً قياسه الجبرى $ج_1$ = −٦ × ٨ = −٤٨ نيوتن . سم

القوتان (ق ، ق) الأوليين تكونان ازدواجاً قياسه الجبرى $ج_2$ = ق × ٦ = ٦ ق

القوتان (ق ، ق) الآخريين تكونان ازدواجاً قياسه الجبرى

$ج_3$ = −ق × ٢ ع م = −ق × ٢ حـ ع حا θ = −ق × ٢ × ٤ × $\frac{٦}{١٠}$

= −٤,٨ ق حيث من هندسة الشكل : أ حـ = ١٠ سم

، ∵ المستطيل متزن ∴ −٤٨ + ٦ ق − ٤,٨ ق = ٠

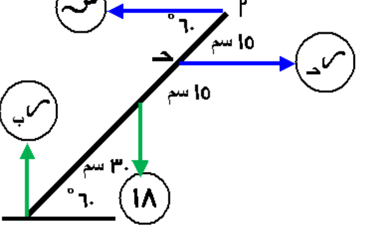
∴ ١,٢ ق = ٤٨ ∴ ق = ٤٠ نيوتن

(١٥) $\overline{أ ب}$ قضيب طوله ٦٠ سم و وزنه ١٨ نيوتن يؤثر عند منتصفه ، يمكن للقضيب الدوران بسهولة فى مستوى رأسى حول مسمار أفقى يمر بثقب صغير فى القضيب عند النقطة حـ التى تبعد ١٥ سم عن أ فإذا أستند القضيب بطرفه ب على نضد أفقى أملس و شد الطرف أ أفقياً حتى أصبح رد فعل النضد مساوياً لوزن القضيب أوجد الشد فى الحبل و رد فعل المسمار علماً بأن القضيب يتزن فى وضع يميل فيه على الأفقى بزاوية قياسها ٦٠°

الحل

∵ رد فعل النضد مساوياً لوزن القضيب أى : ق$_{ب}$ = ١٨ ∴ القوتان (ق$_{ب}$ ، ١٨) تكونان ازدواجاً قياسه الجبرى ج$_1$ = ١٨ × ٣٠ حتا ٦٠°

= ٥٤٠ × $\frac{١}{٢}$ = ٢٧٠ نيوتن . سم



، ∵ القضيب متزن

∴ القوتان (ق$_{حـ}$ ، ش) تكونان ازدواجاً قياسه لجبرى

ج$_2$ = − ش × ١٥ حتا ٦٠° = − ش × ١٥ × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ = − $\frac{١٥}{٢}$ $\sqrt{٣}$ ش

و يكون : ٢٧٠ − $\frac{١٥}{٢}$ $\sqrt{٣}$ ش = ٠ ∴ $\frac{١٥}{٢}$ $\sqrt{٣}$ ش = ٢٧٠

∴ ش = ١٢ $\sqrt{٣}$ نيوتن ، ق$_{حـ}$ = ١٢ $\sqrt{٣}$ نيوتن

أى أن : الشد فى الحبل = رد فعل المسمار = ١٢ $\sqrt{٣}$ نيوتن

(١٦) ﻫ ب حـ ء صفيحة رقيقة على هيئة مستطيل فيه ﻫ ب = ١٨ سم ، ب حـ = ٢٤ سم ، و وزنها ٢٠ نيوتن يؤثر فى نقطة تلاقى القطرين علقت الصفيحة فى مسمار رفيع من ثقب صغير بالقرب من الرأس ء بحيث كان مستواها رأسياً ، فإذا أثر على الصفيحة ازدواج معيار عزمه يساوى ١٥٠ نيوتن . سم ، و اتجاهه عمودى على مستوى الصفيحة فأوجد ميل $\overline{ءب}$ على الرأسى فى وضع الاتزان

الحل

∵ الصفيحة متزن تحت تأثير الا زدواج : ج$_1$ = ١٥٠ نيوتن . سم و القوتين (٢٠ ، ق)

و بفرض أن الازدواج يعمل فى اتجاه عكس دوران عقارب الساعة

، ∵ الازدواج لا يتزن إلا مع ازدواج مثله

∴ القوتان (٢٠ ، ق) تكونان ازدواجاً

∴ ق = ٢٠ نيوتن

، ∵ ٢٠ يؤثر رأسياً لأسفل ∴ ق يؤثر رأسياً لأعلى

، من هندسة الشكل : ب ء = ٣٠ سم

∴ م ء = ١٥ سم

، القياس الجبرى لعزمهما = ج$_2$

= − ٢٠ × م ﻫ = − ٢٠ × م ء حا θ

= − ٢٠ × ١٥ × حا θ = − ٣٠٠ حا θ

∴ ج$_1$ + ج$_2$ = ٠ ∴ ١٥٠ − ٣٠٠ حا θ = ٠

∴ حا θ = $\frac{١}{٢}$ ∴ θ = ٣٠° أو ١٥٠°

(١٧) ﻫ ب حـ ء مربع طول ضلعه ١٠ سم أثرت القوتان ٦٠ ، ٦٠ نيوتن فى اتجاهات $\overleftarrow{بﻫ}$ ، $\overleftarrow{ءحـ}$ أوجد قوتين متساويتين فى المقدار تؤثران فى ﻫ ، حـ و توازيان $\overleftarrow{بء}$ و تكونان ازدواجاً يتكافئ مع الازدواج المكون من القوتين الأوليين

الحل

القوتان (٦٠ ، ٦٠) تكونان ازدواجاً قياسه الجبرى

ج$_1$ = − ٦٠ × ١٠ = − ٦٠٠ نيوتن . سم

، من هندسة الشكل : ﻫ حـ = ١٠ $\sqrt{٢}$ سم

و هو البعد العمودى بين القوتان (ق ، ق)

، القوتان (ق ، ق) تكونان ازدواجاً قياسه الجبرى ج$_2$ = − ق × ١٠ $\sqrt{٢}$ ، ∵ ج$_1$ يكافئ ج$_2$

∴ − ٦٠٠ = − ق × ١٠ $\sqrt{٢}$ ∴ ق = ٣٠ $\sqrt{٢}$ نيوتن

٥ – ٢ الازدواج المحصل

نظام القوى المستوية الذى يكافئ ازدواجاً :

يقال لعدة قوى مستوية ق١ ، ق٢ ، .... ، قن أنها تكافئ ازدواجاً

إذا تحقق الشرطان الآتيان معاً :

(١) انعدام محصلة القوى

(أو مجموع المركبات الجبرية للقوى فى أى اتجاه = صفر)

(٢) مجموع عزوم القوى حول أى نقطة لا ينعدم

ملاحظات :

(١) تحقق أحد الشرطين لا يكفى لإثبات أن المجموعة تكافئ ازدواجاً

(٢) إذا انعدمت محصلة مجموعة من القوى أى (ح = ٠) و كان :

١) ع = ٠ فإن : مجموعة القوى تكون متزنة

٢) ع ≠ ٠ فإن : مجموعة القوى تكافئ ازدواجاً

إجابة تفكير ناقد صفحة ٨٧

أ ب قضيب خفيف أثرت عليه القوى الموضحة بالشكل أوجد مجموع عزوم القوى حول كل من ب ، حـ ماذا تلاحظ ؟

الحل

بفرض أن : ى متجه وحدة فى اتجاه القوة ١٥ نيوتن (رأسياً لأعلى)

∴ ح = ١٥ ى − ٨ ى − ٧ ى = ٠

∵ ع ب = ٨ × ٩ − ١٥ × ١٤ = − ١٣٨ نيوتن . سم

، ع حـ = − ٧ × ٩ − ١٥ × ٥ = − ١٣٨ نيوتن . سم

، ∵ ع ب = ع حـ ، ح = ٠ ∴ خط عمل المحصلة // ب حـ

إجابة حاول أن تحل (أ) صفحة ٨٧

فى الشكل المقابل :
أثبت أن المجموعة تكافئ ازدواجاً
و أوجد القياس الجبرى لعزمه

الحل

بفرض أن : ى متجه وحدة فى الاتجاه رأسياً لأعلى

∴ ح = ١١ ى + ٦ ى − ٧ ى − ١٠ ى = ٠

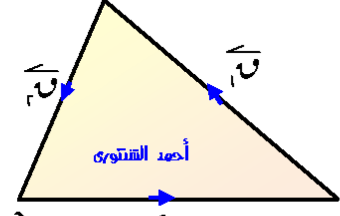
، ∵ ع ب = − ١٠ × ١٢ − ٧ × ٨ + ١١ × ٣ = − ١٤٣ نيوتن . سم

∴ المجموعة تكافئ ازدواجاً القياس الجبرى لعزمه = − ١٤٣ نيوتن . سم

قاعدة :

إذا أثرت ثلاث قوى مستوية و غير متلاقية فى نقطة فى جسم متماسك و مثلها تمثيلاً تاماً أضلاع مثلث مأخوذة فى ترتيب دورى واحد كانت هذه المجموعة تكافئ ازدواج معيار عزمه يساوى حاصل ضرب ضعف مساحة سطح المثلث فى مقدار القوة الممثل لوحدة الأطوال

ففى الشكل المقابل :



إذا كانت : ق١ ، ق٢ ، ق٣ ثلاث قوى يمثلها تمثيلاً تاماً أضلاع المثلث أ ب حـ

و كان : ق١ / أ ب = ق٢ / ب حـ = ق٣ / حـ أ = م

حيث م مقدار ثابت و مأخوذة فى اتجاه دورى واحد

فإن : المجموعة تكافئ ازدواجاً معيار عزمه = ٢ × مساحة سطح المثلث أ ب حـ × م

إجابة حاول أن تحل (٢) صفحة ٨٨

أ ب حـ مثلث قائم الزاوية فى ب فيه أ ب = ٣٠ سم ، ب حـ = ٤٠ سم
أثرت قوى مقاديرها ٦ ، ٨ ، ١٠ نيوتن فى $\overrightarrow{\text{أب}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب حـ}}$ ، $\overrightarrow{\text{حـ أ}}$ على الترتيب أثبت أن المجموعة تكافئ ازدواجاً و أوجد معيار عزمه

الحل

من هندسة الشكل : أ حـ = ٥٠ سم

∵ $\frac{٦}{٣٠} = \frac{٨}{٤٠} = \frac{١٠}{٥٠} = \frac{١}{٥}$

∴ مقدار القوة الممثل لوحدة الأطوال = $\frac{١}{٥}$ نيوتن

، ∵ القوى مأخوذة فى ترتيب دورى واحد

∴ المجموعة تكافئ ازدواجاً ،

معيار عزم الازدواج = ٢ × مساحة سطح المثلث أ ب حـ × $\frac{١}{٥}$

= ٢ × $\frac{١}{٢}$ × ٤٠ × ٣٠ × $\frac{١}{٥}$ = ٢٤٠ نيوتن . سم

تعميم :

إذا أثرت عدة قوى مستوية فى جسم متماسك و مثلها تمثيلاً تاماً أضلاع مضلع مقفل مأخوذة فى ترتيب دورى واحد كانت هذه المجموعة تكافئ ازدواجاً معيار عزمه يساوى حاصل ضرب ضعف مساحة سطح المضلع فى مقدار القوة الممثل لوحدة الأطوال

إجابة حاول أن تحل (٣) صفحة ٨٩

أ ب حـ ء شبه منحرف فيه : $\overline{\text{أ ء}}$ // $\overline{\text{ب حـ}}$ ، $\overline{\text{أ ب}}$ ⊥ $\overline{\text{ب حـ}}$ ،
أ ب = ٦ سم ، ب حـ = ٩ سم ، أ ء = ٣ سم أثرت القوى ق$_{١}$ ، ق$_{٢}$ ، ق$_{٣}$ ، ق$_{٤}$ ممثلة تمثيلاً تاماً بالقطع المستقيمة الموجهة $\overrightarrow{\text{ء أ}}$ ، $\overrightarrow{\text{حـ ء}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب حـ}}$ ، $\overrightarrow{\text{أ ب}}$ على الترتيب فإذا كانت المجموعة تكافئ ازدواجاً معيار عزمه ٣٦٠ نيوتن . سم فى الاتجاه أ ب حـ ء فأوجد مقدار كل من ق$_{١}$ ، ق$_{٢}$ ، ق$_{٣}$ ، ق$_{٤}$



الحل

من هندسة الشكل : ء هـ = ٦ سم ،
حـ هـ = ٦ سم ، ء حـ = ٦ $\sqrt{٢}$ سم

، ∵ القوى تؤثر فى أضلاع المضلع و مأخوذة فى ترتيب دورى واحد ، و تكافئ ازدواجاً معيار عزمه ٣٦٠ نيوتن . سم

∴ ٣٦٠ = ٢ × مساحة سطح شبه المنحرف أ ب حـ ء × م

حيث : م = مقدار القوة الممثل لوحدة الأطوال

∴ ٣٦٠ = ٢ × $\frac{١}{٢}$ × (٩ × ٣) × ٦ × م   ومنها : م = ٥

∴ $\frac{ق_{١}}{٣} = \frac{ق_{٢}}{٦\sqrt{٢}} = \frac{ق_{٣}}{٩} = \frac{ق_{٤}}{٦} = ٥$

∴ ق$_{١}$ = ٥ × ٣ = ١٥ نيوتن ، ق$_{٢}$ = ٥ × ٦ $\sqrt{٢}$ = ٣٠ $\sqrt{٢}$ نيوتن

، ق$_{٣}$ = ٥ × ٩ = ٤٥ نيوتن ، ق$_{٤}$ = ٥ × ٦ = ٣٠ نيوتن

قاعدة :

إذا كان مجموع القياسات الجبرية لعزوم مجموعة من القوى المستوية بالنسبة لثلاث نقط فى مستواها ليست على استقامة واحـــدة يساوى مقداراً ثابتاً (لا يساوى الصفر) كانت هذه المجموعة تكافئ ازدواجاً القياس الجبرى لعزمه يساوى هذا المقدار الثابت

أى أن :

إذا كانت : أ ، ب ، حـ ثلاث نقط فى مستوى القوى و ليست على استقامة واحدة و كان : ج$_{أ}$ = ج$_{ب}$ = ج$_{حـ}$ = مقدار ثابت (لا يساوى الصفر) فإن : مجموعة القوى تكافئ ازدواجاً القياس الجبرى لعزمه يساوى هذا المقدار الثابت

إجابة حاول أن تحل (٤) صفحة ٩٠

أ ب حـ ء مربع طول ضلعه ١٠ سم ، هـ ∈ $\overleftarrow{\text{حـ ب}}$ ، و ∈ $\overleftarrow{\text{حـ ء}}$ بحيث كان حـ هـ = حـ و = ٣٠ سم ، أثرت قوى مقاديرها ٤٠ ، ١٠ ، ٢٠ ، ٣٠ ، ٢٠ $\sqrt{2}$ ث كجم فى $\overleftarrow{\text{أ ب}}$ ، $\overleftarrow{\text{ب حـ}}$ ، $\overleftarrow{\text{حـ ء}}$ ، $\overleftarrow{\text{ء أ}}$ ، $\overleftarrow{\text{هـ و}}$ على الترتيب أثبت أن المجموعة تكافئ ازدواجاً و أوجد عزمه

الحل

من هندسة الشكل :

ن حـ = حـ و × حا ٤٥°

= ٤٠ × $\frac{1}{\sqrt{2}}$ = ٢٠ $\sqrt{2}$ سم

∵ ع$_{\text{حـ}}$ = ٤٠ × ١٠ + ٣٠ × ١٠ − ٢٠ $\sqrt{2}$ × ٢٠ $\sqrt{2}$

= − ١٠٠ ث كجم . سم

، ع$_{\text{هـ}}$ = ٣٠ × ١٠ + ٢٠ × ٤٠ − ٤٠ × ٣٠ = − ١٠٠ ث كجم . سم

، ع$_{\text{و}}$ = ١٠ × ٤٠ + ٤٠ × ١٠ − ٣٠ × ٣٠ = − ١٠٠ ث كجم . سم

، ∵ النقط حـ ، هـ ، و ليست على استقامة واحدة

∴ المجموعة تكافئ ازدواجاً يعمل على الدوران فى اتجاه دوران عقارب الساعة ،

معيار عزمه = ١٠٠ ث كجم . سم

الازدواج المحصل :

يعرف مجموع ازدواجين مستويين على أنه :
الازدواج الذى عزمه يساوى مجموع عزمى هذين الازدواجين

$\overleftarrow{ع} = \overleftarrow{ع}_1 + \overleftarrow{ع}_2$ و يسمى مجموع ازدواجين مستويين بالازدواج المحصل (المجموعة تكافئ ازدواجاً)

ملاحظة :

مجموع أى عدد محدود من الازدواجات المستوية هو ازدواج عزمه يساوى مجموع عزوم هذه الازدواجات

إجابة حاول أن تحل (٥) صفحة ٩١

الشكل المقابل :
يمثل صفيحة منتظمة على شكل مثلث متساوى الأضلاع تؤثر عليها القوى كما بالشكل أوجد القياس الجبرى لعزم الازدواج المحصل



الحل

القوتان (٨٠ ، ٨٠) تكونان ازدواجاً قياسه الجبرى

ع$_1$ = ٨٠ × ٢ = ١٦٠ نيوتن . م

القوتان (١٠٠ ، ١٠٠) تكونان ازدواجاً قياسه الجبرى

ع$_2$ = ١٠٠ × ٢ = ٢٠٠ نيوتن . م

القوتان (١٥٠ ، ١٥٠) تكونان ازدواجاً قياسه الجبرى

ع$_3$ = ١٥٠ × ٢ = ٣٠٠ نيوتن . م

∴ الازدواج المحصل = ع$_1$ + ع$_2$ + ع$_3$ = ١٦٠ + ٢٠٠ + ٣٠٠ = ٦٦٠ نيوتن . م

إجابة حاول أن تحل (٦) صفحة ٩١

أ ب حـ ء مستطيل فيه أ ب = ٦٠ سم ، ب حـ = ١٦٠ سم ، س ، ص منتصفى ب حـ ، أ ء أثرت قوى مقاديرها ٢٠٠ ، ٢٠٠ ، ٤٠٠ ، ٤٠٠ ، ق ، ق نيوتن فى الاتجاهات أ ب ، حـ ء ، حـ ب ، أ ء ، س أ ، ص حـ على الترتيب ، إذا كان القياس الجبرى لعزم الازدواج المحصل يساوى ٦٤٠٠ نيوتن . سم أوجد قيمة ق

الحل

من هندسة الشكل : أ س = ١٠٠ سم ،

ص ن = ٨٠ حا θ = ٨٠ × $\frac{٦٠}{١٠٠}$

= ٤٨ سم

القوتان (٢٠٠ ، ٢٠٠) تكونان ازدواجاً قياسه الجبرى

$ع_1$ = – ٢٠٠ × ١٦٠ = – ٣٢٠٠٠ نيوتن . سم

القوتان (٤٠٠ ، ٤٠٠) تكونان ازدواجاً قياسه الجبرى

$ع_2$ = ٤٠٠ × ٦٠ = ٢٤٠٠٠ نيوتن . سم

، القوتان (ق ، ق) تكونان ازدواجاً قياسه

$ع_3$ = ق × ص ن = ق × ٤٨ = ٤٨ ق نيوتن . سم

، ∵ الازدواج المحصل = ٦٤٠٠ نيوتن . سم

∴ ٦٤٠٠ = – ٣٢٠٠٠ + ٢٤٠٠٠ + ٤٨ ق

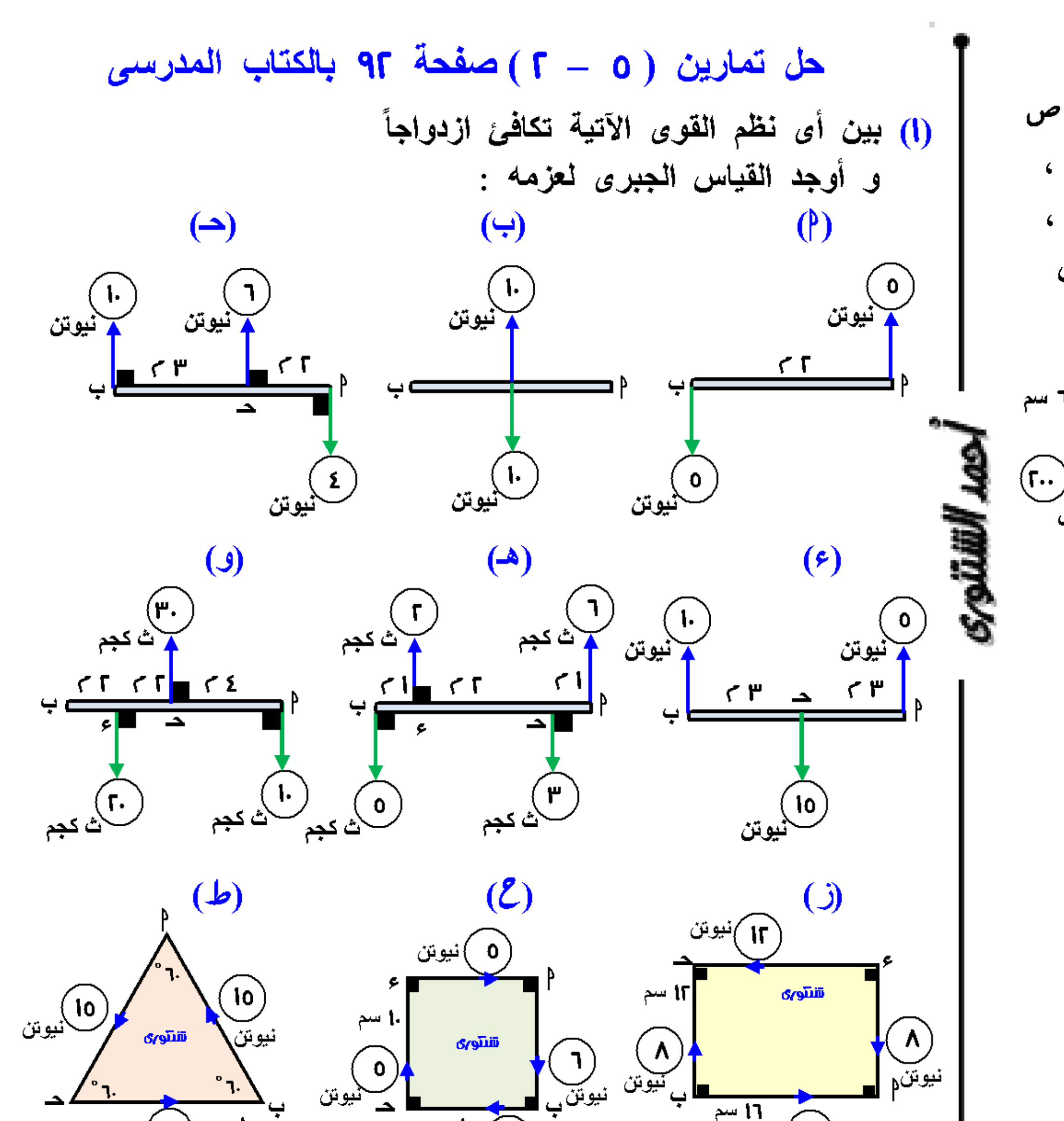
∴ ٦٤٠٠ = – ٨٠٠٠ + ٤٨ ق

∴ ١٤٤٠٠ = ٤٨ ق

∴ ق = ٣٠٠ نيوتن

حل تمارين (٥ – ٢) صفحة ٩٢ بالكتاب المدرسى

(١) بين أى نظم القوى الآتية تكافئ ازدواجاً و أوجد القياس الجبرى لعزمه :



الحل

(ا) ∵ ح = ٠ ، جم = ٥ × ٢ = ١٠ نيوتن . م

∴ المجموعة تكافئ ازدواجاً القياس الجبرى لعزمه = ١٠ نيوتن . م

(ب) ∵ ح = ٠ ، جم = ٠ ∴ المجموعة لا تكافئ ازدواج

" لاحظ : خطى عمل القوتين على استقامة واحدة "

(حـ) ∵ ح ≠ ٠ ∴ المجموعة لا تكافئ ازدواج

(ء) ∵ ح = ٠ ، جم = ١٥ × ٣ − ١٠ × ٦ = − ١٥ نيوتن . م

∴ المجموعة تكافئ ازدواجاً القياس الجبرى لعزمه = − ١٥ نيوتن . م

(هـ) ∵ ح = ٠ ، جم = ٣ × ١ + ٥ × ٤ − ٢ × ٣ = ١٧ ث كجم . م

∴ المجموعة تكافئ ازدواجاً القياس الجبرى لعزمه = ١٧ ث كجم . م

(و) ∵ ح ≠ ٠ ∴ المجموعة لا تكافئ ازدواج

(ز) ∵ القوتان (٨ ، ٨) تكونان ازدواجاً قياسه الجبرى

ج١ = − ٨ × ١٦ = − ١٢٨ نيوتن . سم

، القوتان (١٢ ، ١٢) تكونان ازدواجاً قياسه الجبرى

ج٢ = ١٢ × ١٢ = ١٤٤ نيوتن . سم

∴ المجموعة تكافئ ازدواجاً القياس الجبرى لعزمه = ج١ + ج٢

= − ١٢٨ + ١٤٤ = ١٦ نيوتن . سم

(ح) ∵ ح ≠ ٠ ∴ المجموعة لا تكافئ ازدواج

" لاحظ : القوى ليست ممثلة تمثيلاً تاماً بأضلاع المربع لأن : ٥/١٠ ≠ ٦/١٠ "

(ط) ∵ ١٥/١٠ = ١٥/١٠ = ١٥/١٠ = ٣/٢ = م ، القوى فى ترتيب دورى واحد

∴ المجموعة تكافئ ازدواجاً القياس الجبرى لعزمه

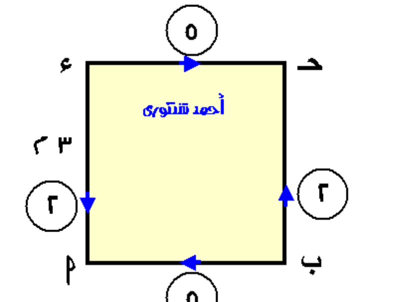
= ٢ × مساحة سطح المثلث ا ب حـ × م

= ٢ × ١/٢ × ١٠ × ١٠ × حا ٦٠° × ٣/٢ = ١٥٠ × √٣ / ٢

= ٧٥ √٣ نيوتن . سم

(٢) ا ب حـ ء مربع طول ضلعه ٣ أمتار تؤثر القوى ٥ ، ٢ ، ٥ ، ٢ نيوتن فى اتجاهات ب ا ، ب حـ ، ء حـ ، ء ا على الترتيب بين أن المجموعة تكافئ ازدواجاً و أوجد معيار عزمه

الحل



القوتان (٥ ، ٥) تكونان ازدواجاً قياسه الجبرى

ج١ = ٥ × ٣ = ١٥ نيوتن . م

، القوتان (٢ ، ٢) تكونان ازدواجاً قياسه الجبرى

ج٢ = − ٢ × ٣ = − ٦ نيوتن . م

∵ ج١ + ج٢ = ١٥ − ٦ = ٩ نيوتن . م

∴ المجوعة تكافئ ازدواجاً معيار عزمه = ٩ نيوتن . م

(٣) ا ب حـ ء مستطيل فيه ا ب = ٦ سم ، ب حـ = ٨ سم أثرت قوى مقدار كل منها ٧ ث كجم فى كل من ا ب ، ب حـ ، حـ ء ، ء ا على الترتيب أثبت أن المجموعة تكافئ ازدواجاً و أوجد معيار عزمه

الحل

القوتان الأوليتان (٧ ، ٧) تكونان ازدواجاً قياسه الجبرى ج١ = ٧ × ٨ = ٥٦ ث كجم . سم

، القوتان الأخيرتان (٧ ، ٧) تكونان ازدواجاً قياسه الجبرى ج٢ = ٧ × ٦ = ٤٢ ث كجم . سم

، ∵ ج١ + ج٢ = ٥٦ + ٤٢ = ٩٨ ث كجم . سم

∴ المجوعة تكافئ ازدواجاً معيار عزمه = ٩٨ ث كجم . سم

(٤) ا ب حـ ء مستطيل فيه ا ب = ٣٠ سم ، ب حـ = ٤٠ سم أثرت قوى مقاديرها ١٥ ، ٣٠ ، ١٥ ، ٣٠ ث جم فى كل من ا ب ، ب حـ ، حـ ء ، ء ا على الترتيب أثبت أن المجموعة تكافئ ازدواجاً و أوجد معيار

عزمه ، ثم أوجد قوتين تؤثران فى ا ، حـ عموديتين على ا حـ بحيث تتزن المجموعة

الحل

القوتان (٣٠ ، ٣٠) تكونان ازدواجاً قياسه الجبرى ع١ = ٣٠ × ٣٠ = ٩٠٠ ث جم . سم

، القوتان (١٥ ، ١٥) تكونان ازدواجاً قياسه الجبرى ع٢ = − ١٥ × ٤٠ = − ٦٠٠ ث جم . سم

، ∵ ع١ + ع٢ = ٩٠٠ − ٦٠٠ = ٣٠٠ ث جم . سم

∴ المجموعة تكافئ ازدواجاً معيار عزمه = ٣٠٠ ث جم . سم

و يعمل فى الاتجاه ا ب حـ ء ، من هندسة الشكل : ا حـ = ٥٠ سم

، ∵ الازدواج لا يتزن إلا مع ازدواج آخر له نفس العزم فى اتجاه مضاد

∴ القوتان (ق ، ق) تكونان ازدواجاً قياسه الجبرى = − ٣٠٠ ث جم . سم

∴ − ق × ا حـ = − ٣٠٠ ∴ − ق × ٥٠ = − ٣٠٠

∴ ق = ٦ ث جم ∴ (ق ، ق) = (٦ ، ٦)

(٥) ا ب حـ ء معين طول ضلعه ١٠ سم ، ق (∠ب ا حـ) = ١٢٠° ، أثرت قوى مقاديرها ٢٠ ، ١٥ ، ٢٠ ، ١٥ ث كجم فى ا ب ، ب حـ ، حـ ء ، ء ا على الترتيب أثبت أن المجموعة تكافئ ازدواجاً و أوجد معيار عزمه ، ثم أوجد قوتين تؤثران فى ب ، ء عموديتين على ب ء بحيث تتزن المجموعة

الحل

من هندسة الشكل :

ب م = ١٠ حتا ٣٠° = ٥√٣ سم ،

ب ء = ٢ ب م = ١٠√٣ سم ،

ء حـ = ب و = ١٠ حا ٦٠° = ٥√٣ سم

القوتان (٢٠ ، ٢٠) تكونان ازدواجاً قياسه الجبرى

ع١ = − ٢٠ × ٥√٣ = − ١٠٠√٣ ث كجم . سم

، القوتان (١٥ ، ١٥) تكونان ازدواجاً قياسه الجبرى

ع٢ = − ١٥ × ٥√٣ = − ٧٥√٣ ث كجم . سم

، ∵ ع١ + ع٢ = − ١٠٠√٣ − ٧٥√٣ = − ١٧٥√٣ ث كجم . سم

∴ المجموعة تكافئ ازدواجاً معيار عزمه = ١٧٥√٣ ث كجم . سم

و يعمل فى الاتجاه ا ء حـ ب

، ∵ الازدواج لا يتزن إلا مع ازدواج آخر له نفس العزم فى اتجاه مضاد

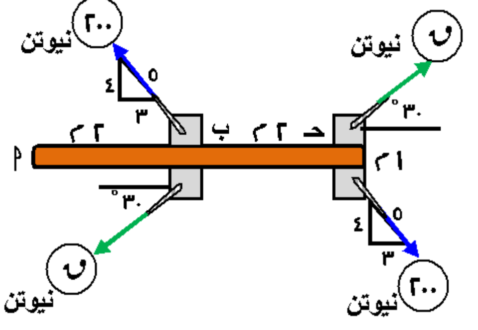
∴ القوتان (ق ، ق) تكونان ازدواجاً قياسه الجبرى = ١٧٥√٣ ث كجم . سم

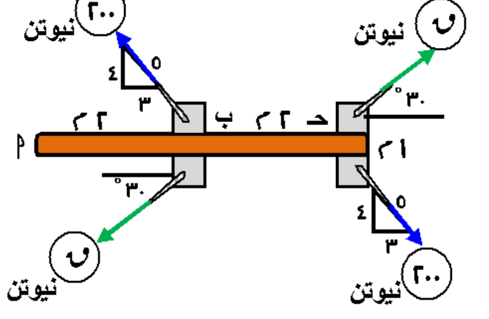
∴ ق × ب ء = ١٧٥√٣ ∴ ق × ١٠√٣ = ١٧٥√٣

∴ ق = ١٧,٥ ث كجم ∴ (ق ، ق) = (١٧,٥ ، ١٧,٥)

(٦) الشكل المقابل : يمثل قنطرة تؤثر عليها القوى الموضحة بالشكل إذا كان القياس الجبرى لعزم الازدواج المحصل يساوى ٢٠٠ − ٢٠٠√٣ نيوتن . م

أوجد ق





الحل

بتحليل القوى فى اتجاهين متعامدين كما بالشكل يكون :

القوتان (ق حا ٣٠° ، ق حا ٣٠°) تكونان ازدواجاً قياسه الجبرى

ع١ = ق حا ٣٠° × ٢

= ق × ½ × ٢ = ق نيوتن . م

القوتان (ق حتا ٣٠° ، ق حتا ٣٠°) تكونان ازدواجاً قياسه الجبرى

ع٢ = − ق حتا ٣٠° × ١ = − $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ق نيوتن . م

القوتان (٢٠٠ حا θ ، ٢٠٠ حا θ) تكونان ازدواجاً قياسه الجبرى

ع٣ = − ٢٠٠ حا θ × ٢ = − ٢٠٠ × $\frac{4}{5}$ × ٢ = − ٣٢٠ نيوتن . م

القوتان (٢٠٠ حتا θ ، ٢٠٠ حتا θ) تكونان ازدواجاً قياسه الجبرى

ع٤ = ٢٠٠ حتا θ × ١ = ٢٠٠ × $\frac{3}{5}$ × ١ = ١٢٠ نيوتن . م

، ∵ الازدواج المحصل = ٢٠٠ − ٢٠٠ $\sqrt{3}$ نيوتن . م

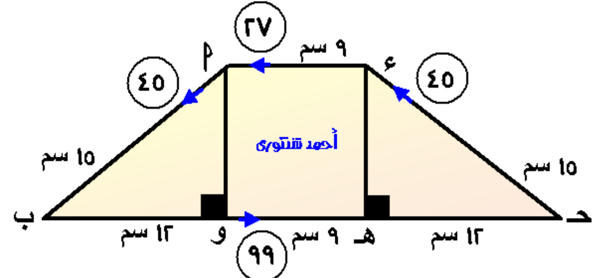
∴ ٢٠٠ − ٢٠٠ $\sqrt{3}$ = ق − $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ق − ٣٢٠ + ١٢٠ بالضرب × ٢ ينتج :

٤٠٠ − ٤٠٠ $\sqrt{3}$ = ٢ ق − $\sqrt{3}$ ق − ٦٤٠ + ٢٤٠

∴ (٢ − $\sqrt{3}$) ق = ٤٠٠ (٢ − $\sqrt{3}$) ∴ ق = ٤٠٠ نيوتن

(٧) ا ب حـ ء شبه منحرف فيه : ا ء // ب حـ ، ا ء = ٩ سم ، ا ب = ء حـ = ١٥ سم ، ب حـ = ٣٣ سم أثرت قوى مقاديرها ٤٥ ، ٩٩ ، ٤٥ ، ٢٧ نيوتن فى ا ب ، ب حـ ، حـ ء ، ء ا على الترتيب أثبت أن المجموعة تكافئ ازدواجاً و أوجد معيار عزمه

الحل



من هندسة الشكل :

حـ هـ = ب و = ١٢ سم ،

ا ء = و هـ = ٩ سم ،

∵ $\frac{٤٥}{١٥}$ = $\frac{٩٩}{٣٣}$ = $\frac{٤٥}{١٥}$ = $\frac{٢٧}{٩}$

= ٣ = م

، القوى فى ترتيب دورى واحد ∴ المجموعة تكافئ ازدواجاً القياس الجبرى لعزمه

= ٢ × مساحة سطح شبه المنحرف ا ب حـ ء × م

= ٢ × $\frac{1}{2}$ × (٣٣ + ٩) × ٩ × ٣ = ١١٤٣ نيوتن . سم

(٨) ا ب حـ ء هـ و مسدس منتظم طول ضلعه ١٥ سم أثرت قوى مقاديرها ٤٠ ، ٥٠ ، ٣٠ ، ٤٠ ، ٥٠ ، ٣٠ نيوتن فى ا ب ، ب حـ ، حـ ء ، ء هـ ، هـ و ، و ا على الترتيب عين عزم الازدواج المحصل

الحل

من هندسة الشكل : ب ء = ب و = و ء = ١٥ $\sqrt{3}$ سم

القوتان (٤٠ ، ٤٠) تكونان ازدواجاً قياسه الجبرى

ع١ = − ٤٠ × ١٥ $\sqrt{3}$ = − ٦٠٠ $\sqrt{3}$ نيوتن . سم

القوتان (٥٠ ، ٥٠) تكونان ازدواجاً قياسه الجبرى

ع٢ = ٥٠ × ١٥ $\sqrt{3}$ = ٧٥٠ $\sqrt{3}$ نيوتن . سم

القوتان (٣٠ ، ٣٠) تكونان ازدواجاً قياسه الجبرى

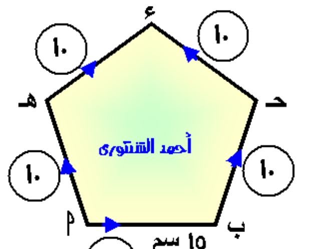
ع٣ = − ٣٠ × ١٥ $\sqrt{3}$ = − ٤٥٠ $\sqrt{3}$ نيوتن . سم

∴ الازدواج المحصل = − ٦٠٠ $\sqrt{3}$ + ٧٥٠ $\sqrt{3}$ − ٤٥٠ $\sqrt{3}$ = − ٣٠٠ $\sqrt{3}$ نيوتن . سم

∴ معيار عزم الازدواج المحصل = ٣٠٠ $\sqrt{3}$ نيوتن . سم

(٩) ا ب حـ ء هـ خماسى منتظم طول ضلعه ١٥ سم أثرت قوى مقدار كل منها ١٠ ث كجم فى ا ب ، ب حـ ، حـ ء ، ء هـ ، هـ ا على الترتيب أثبت أن المجموعة تكافئ ازدواجاً و أوجد معيار عزمه

الحل



∵ $\frac{١٠}{١٥}$ = $\frac{2}{3}$ = م ، القوى فى ترتيب دورى واحد

∴ المجموعة تكافئ ازدواجاً القياس الجبرى لعزمه

= ٢ × مساحة سطح الخماسى المنتظم ا ب حـ ء هـ × م

= ٢ × $\frac{5}{4}$ × ٢٢٥ × طتا $\frac{1}{5}$ π × $\frac{2}{3}$ ≃ ٥١٦ ث كجم . سم

∴ معيار عزم الازدواج المحصل = ٥١٦ ث كجم . سم

(١٠) ﺃ ب ﺣ مثلث فيه ﺃ ب = ب ﺣ = ٦ سم ، ق (∠ﺃ ب ﺣ) = ١٢٠° أثرت قوى مقاديرها ١٨ ، ١٨ ، ١٨ $\sqrt{3}$ ث جم فى ﺃ ب ، ﺣ ب ، ﺣ ﺃ على الترتيب أثبت أن المجموعة تكافئ ازدواجاً و أوجد معيار عزمه

الحل

من هندسة الشكل : ﺃ ﺣ = ٦ $\sqrt{3}$ سم

" من قانون جيب التمام "

∵ $\frac{١٨}{٦}$ = $\frac{١٨\sqrt{3}}{٦\sqrt{3}}$ = ٣ = م

، القوى فى ترتيب دورى واحد

∴ المجموعة تكافئ ازدواجاً القياس الجبرى لعزمه

= ٢ × مساحة سطح المثلث ﺃ ب ﺣ × م

= ٢ × $\frac{١}{٢}$ × ٦ × ٦ × حا ١٢٠° × ٣ = ٥٤ $\sqrt{3}$ ث جم . سم

∴ معيار عزم الازدواج المحصل = ٥٤ $\sqrt{3}$ ث جم . سم

(٢) ﺃ ب ﺣ ء مربع طول ضلعه ٦٠ سم تؤثر القوى ١٠ ، ٢٠ ، ٨٠ ، ٥٠ نيوتن فى اتجاهات ﺃ ب ، ب ﺣ ، ﺣ ء ، ء ﺃ على الترتيب و أثرت قوتان مقدارهما ٥٠ $\sqrt{2}$ ، ٢٠ $\sqrt{2}$ نيوتن فى ﺃ ﺣ ، ء ب على الترتيب ، برهن أن المجموعة تكافئ ازدواجاً معيار عزمه يساوى ٤٨٠٠ نيوتن . سم

الحل

من هندسة الشكل : ﺃ م = ب م = ٣٠ $\sqrt{2}$ سم

$ع_{ﺃ}$ = ٢٠ × ٦٠ + ٨٠ × ٦٠

– ٢٠ $\sqrt{2}$ × ٣٠ $\sqrt{2}$ = ٤٨٠٠ نيوتن . سم

$ع_{ب}$ = ٥٠ × ٦٠ + ٨٠ × ٦٠ – ٥٠ $\sqrt{2}$ × ٣٠ $\sqrt{2}$ = ٤٨٠٠ نيوتن . سم

$ع_{م}$ = ٢٠ × ٦٠ + ٨٠ × ٦٠ + ٥٠ × ٦٠ + ١٠ × ٦٠

= ٤٨٠٠ نيوتن . سم

، ∵ النقط ﺃ ، ب ، م ليست على استقامة واحدة

∴ المجموعة تكافئ ازدواجاً يعمل على الدوران فى اتجاه دوران عقارب الساعة ، معيار عزمه = ٤٨٠٠ نيوتن . سم

(١٢) فى الشكل المقابل :

أوجد ق التى تجعل القياس الجبرى لعزم الازدواج المحصل يساوى ١٥٠ – ٥٠٠ $\sqrt{3}$ نيوتن . م

الحل

بتحليل القوى فى اتجاهين متعامدين كما بالشكل المقابل يكون :

القوتان (ق حا θ ، ق حا θ) تكونان ازدواجاً قياسه الجبرى

$ع_{١}$ = ق حا θ × ١

= ق × $\frac{٤}{٥}$ × ١

= $\frac{٤}{٥}$ ق نيوتن . م

القوتان (ق حا θ ، ق حا θ) تكونان ازدواجاً قياسه الجبرى

$ع_{٢}$ = ق حتا θ × ٢ = ق × $\frac{٣}{٥}$ × ٢

= $\frac{٦}{٥}$ ق نيوتن . م

القوتان (٢٥٠ حا ٣٠° ، ٢٥٠ حا ٣٠°)

تكونان ازدواجاً قياسه الجبرى

$ع_٣$ = – ٢٥٠ حا ٣٠° × ٢ = – ٢٥٠ × $\frac{١}{٢}$ × ٢

= – ٢٥٠ نيوتن . م

القوتان (٢٥٠ حتا ٣٠° ، ٢٥٠ حتا ٣٠°) تكونان ازدواجاً قياسه الجبرى

$ع_٤$ = – ٢٥٠ حتا ٣٠° × ٤ = – ٢٥٠ × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ × ٤

= – ٥٠٠ $\sqrt{٣}$ نيوتن . م

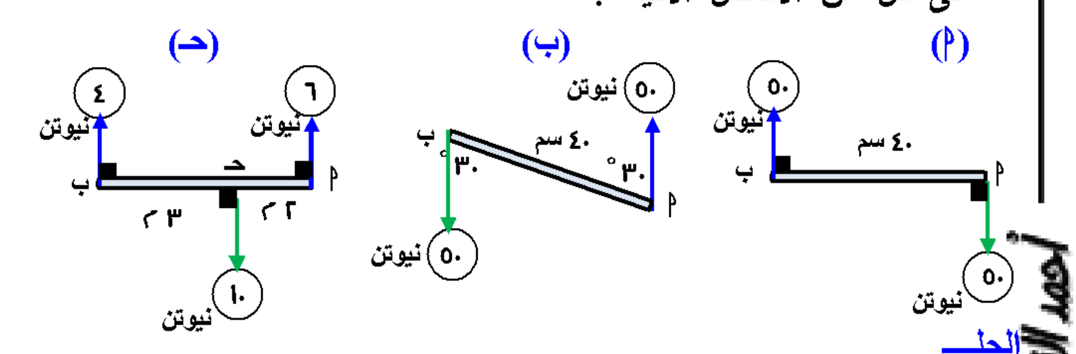
، ∵ الازدواج المحصل = ١٥٠ – ٥٠٠ $\sqrt{٣}$ نيوتن . م

∴ ١٥٠ – ٥٠٠ $\sqrt{٣}$ = $\frac{٤}{٥}$ ق + $\frac{٦}{٥}$ ق – ٢٥٠ – ٥٠٠ $\sqrt{٣}$

١٥٠ = ٢ ق – ٢٥٠ ∴ ٢ ق = ٤٠٠ ∴ ق = ٢٠٠ نيوتن

حل تمارين عامة صفحة ٩٥ بالكتاب المدرسى

(١) أوجد القياس الجبرى لعزم الازدواج المحصل فى كل من الأشكال الآتية :



الحل

(أ) عزم الازدواج المحصل = ٥٠ × ٤٠ = ٢٠٠٠ نيوتن . سم

(ب) عزم الازدواج المحصل = ٥٠ × ٤٠ حا ٣٠° = ١٠٠٠ نيوتن . سم

(حـ) عزم الازدواج المحصل = ٦ × ٢ – ٤ × ٣ = صفر

(٢) الشكل المقابل :

صفيحة على شكل متوازى أضلاع أثر عليها ازدواجان أوجد :

(أ) القياس الجبرى لعزم الازدواج المكون من القوتين ٧ ، ٧

(ب) القياس الجبرى لعزم الازدواج المكون من القوتين ٥ ، ٥ عندما θ = ٦٠°

(حـ) إذا كان القياس الجبرى لعزم الازدواج المحصل يساوى ٣٠ نيوتن . سم فما قيمة θ ؟

(ء) إذا أتزنت الصفيحة فما قيمة θ ؟

الحل

(أ) القياس الجبرى لعزم الازدواج المكون من القوتين ٧ ، ٧

ع = ٧ × ١٠ = ٧٠ نيوتن . سم

(ب) القياس الجبرى لعزم الازدواج المكون من القوتين ٥ ، ٥ عندما θ = ٦٠°

ع = − ٥ × ١٦ حا ٦٠° = − ٨٠ × √٣ / ٢ = − ٤٠ √٣ نيوتن . سم

(حـ) ٣٠ = ٧ × ١٠ − ٥ × ١٦ حا θ ∴ ٨٠ حا θ = ٤٠

∴ حا θ = ١/٢ ∴ θ = ٣٠°

(ء) ∵ الصفيحة متزنة ∴ ٧ × ١٠ = ٥ × ١٦ حا θ

∴ حا θ = ٧٠/٨٠ ∴ θ = ٦١° ٣َ

(٣) أ ب قضيب منتظم طوله ٢٠ سم يمكنه الدوران بسهولة فى مستوى رأسى حول مسمار أفقى ثابت فى وضع أفقى ثابت يمر بثقب صغير فى القضيب عند نقطة حـ ∈ أب حيث أ حـ = ٥ سم ، إذا أتزن القضيب فى وضع أفقى تحت تأثير قوتين مقدار كل منهما ٥٠ نيوتن و تؤثران فى طرفيه أ ، ب فى اتجاهين متضادين و تصنعان مع القضيب زاوية قياسها ٣٠° أوجد وزن القضيب

الحل

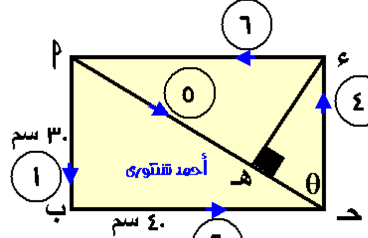
القوتان (٥٠ ، ٥٠) تكونان ازدواجاً قياسه الجبرى ع = ٥٠ × ٢٠ حا ٣٠°

= ١٠٠٠ × ١/٢ = ٥٠٠ نيوتن . سم

∵ القضيب متزن ∴ القوتان (و ، ر) تكونان ازدواجاً قياسه الجبرى ع = − و × ٥

∴ − و × ٥ + ٥٠٠ = ٠ ∴ و = ١٠٠ نيوتن

(٤) أ ب حـ ء مستطيل فيه أ ب = ٣٠ سم ، ب حـ = ٤٠ سم أثرت قوى مقاديرها ١ ، ٢ ، ٤ ، ٦ ، ٥ ث كجم فى كل من أب ، ب حـ ، حـ ء ، ء أ ، أ حـ على الترتيب برهن أن المجموعة تكافئ ازدواجاً و أوجد معيار عزمه



الحل

من هندسة الشكل : أ حـ = ٥٠ سم

ء هـ = ء حـ حا θ = ٣٠ × ٤٠/٥٠ = ٢٤ سم

ع أ = ٢ × ٣٠ + ٤ × ٤٠ = ٢٢٠ ث كجم . سم

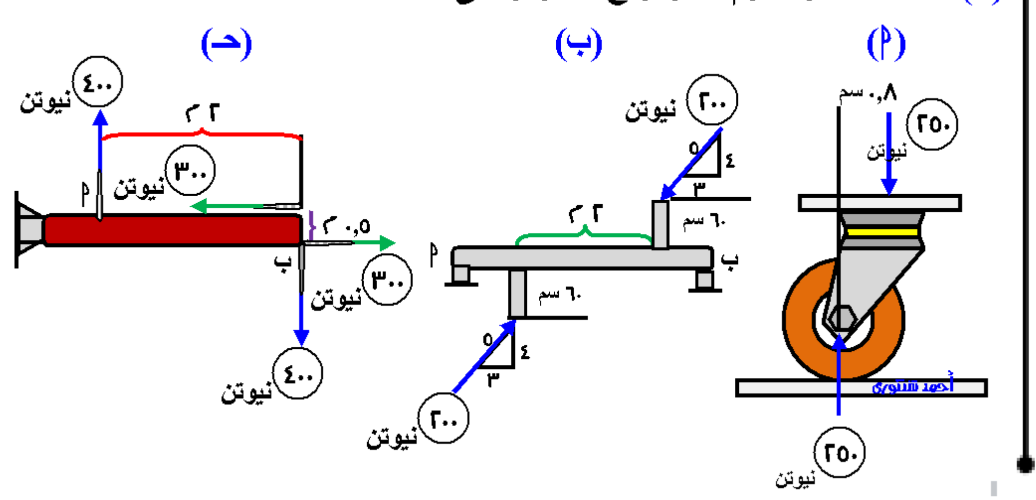
ع ء = ١ × ٤٠ + ٢ × ٣٠ + ٥ × ٢٤ = ٢٢٠ ث كجم . سم

ع حـ = ١ × ٤٠ + ٦ × ٣٠ = ٢٢٠ ث كجم . سم

∵ النقط أ ، ء ، حـ ليست على استقامة واحدة ،

∴ المجموعة تكافئ ازدواجاً يعمل على الدوران فى اتجاه دوران عقارب الساعة ، معيار عزمه = ٢٢٠ ث كجم . سم

(٥) عين معيار عزم الازدواج المؤثر فى كل من الأشكال الآتية :



الحل

(أ) عزم الازدواج المحصل = − ٢٥٠ × ٠,٨ = ٢٠٠ نيوتن . سم

∴ معيار عزم الازدواج المحصل = ٢٠٠ نيوتن . سم

(ب) بتحليل القوى كما بالشكل المقابل

عزم الازدواج المحصل

= ٢٠٠ جتا θ × ١٢٠

− ٢٠٠ جا θ × ٢٠٠

= ٢٠٠ × $\frac{٣}{٥}$ × ١٢٠ − ٢٠٠ × $\frac{٤}{٥}$ × ٢٠٠

= ١٤٤٠٠ − ٣٢٠٠٠

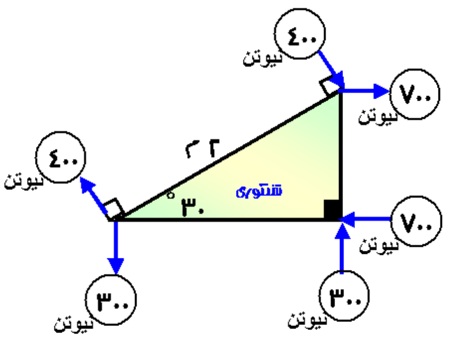
= − ١٧٦٠٠ نيوتن . سم

∴ معيار عزم الازدواج المحصل = ١٧٦٠٠ نيوتن . سم

(حـ) عزم الازدواج المحصل = ٣٠٠ × ٠,٥ − ٤٠٠ × ٢ = − ٦٥٠ نيوتن . م

∴ معيار عزم الازدواج المحصل = ٦٥٠ نيوتن . م

(٦) فى الشكل المقابل : صفيحة على شكل مثلث قائم الزاوية ، تؤثر القوى كما بالشكل أوجد القياس الجبرى لعزم الازدواج المحصل



الحل

من هندسة الشكل :

البعد العمودى بين القوتين (٧٠٠ ، ٧٠٠) = ١ م

، البعد العمودى بين القوتين (٣٠٠ ، ٣٠٠) = $\sqrt{٣}$ م

القوتان (٧٠٠ ، ٧٠٠) تكونان ازدواجاً قياسه الجبرى

$ع_١$ = − ٧٠٠ × ١ = − ٧٠٠ نيوتن . م

القوتان (٣٠٠ ، ٣٠٠) تكونان ازدواجاً قياسه الجبرى

$ع_٢$ = ٣٠٠ × $\sqrt{٣}$ = ٣٠٠ $\sqrt{٣}$ نيوتن . م

القوتان (٤٠٠ ، ٤٠٠) تكونان ازدواجاً قياسه الجبرى

$ع_٣$ = − ٤٠٠ × ٢ = − ٨٠٠ نيوتن . م

∴ عزم الازدواج المحصل = − ٧٠٠ + ٣٠٠ $\sqrt{٣}$ − ٨٠٠

= ٣٠٠ ($\sqrt{٣}$ − ٥) نيوتن . م

(٧) أ ب حـ ء مربع طول ضلعه ٢٠ سم أثرت القوى التى مقاديرها ٣ ، ٥ ، ٣ ، ٥ ث كجم فى أب ، ب حـ ، ء حـ ، ء أ على الترتيب كما أثرت قوتين مقدار كل منهما ٤ $\sqrt{٢}$ ث كجم فى النقطتين أ ، حـ فى اتجاه ب ء ، ء ب على الترتيب أوجد معيار عزم الازدواج المحصل الذى يكافئ المجموعة

الحل

من هندسة الشكل : أ حـ = ٢٠ $\sqrt{٢}$ سم

القوتان (٥ ، ٥) تكونان ازدواجاً قياسه الجبرى

$ع_١$ = ٥ × ٢٠ = ١٠٠ ث كجم . سم

القوتان (٣ ، ٣) تكونان ازدواجاً قياسه الجبرى

$ع_٢$ = − ٣ × ٢٠ = − ٦٠ ث كجم . سم

القوتان (٤ $\sqrt{٢}$ ، ٤ $\sqrt{٢}$) تكونان ازدواجاً قياسه الجبرى

$ع_٣$ = − ٤ $\sqrt{٢}$ × ٢٠ $\sqrt{٢}$ = − ١٦٠ ث كجم . سم

∴ عزم الازدواج المحصل الذى يكافئ المجموعة = ١٠٠ − ٦٠ − ١٦٠

= − ١٢٠ ث كجم . سم

∴ معيار عزم الازدواج المحصل الذى يكافئ المجموعة = ١٢٠ ث كجم . سم

(٨) القوتان $\vec{ق}_1 = أ\,\vec{س} - ٣\,\vec{ص}$ ، $\vec{ق}_2 = -٥\,\vec{س} + ب\,\vec{ص}$ تؤثر فى النقطة حـ (٢ ، −١) ، ء (٠ ، −٢) على الترتيب و تكونان ازدواجاً ، أوجد قيمة كل من أ ، ب ثم أوجد عزم الازدواج و طول البعد العمودى بين القوتين

الحل

∵ القوتان تكونان ازدواجاً ∴ $\vec{ق}_2 = -\vec{ق}_1$

∴ $أ\,\vec{س} - ٣\,\vec{ص} = ٥\,\vec{س} - ب\,\vec{ص}$ ∴ أ = ٥ ، ب = ٣

∴ $\vec{ق}_1 = ٥\,\vec{س} - ٣\,\vec{ص}$ ، $\vec{ق}_2 = -٥\,\vec{س} + ٣\,\vec{ص}$

، عزم الازدواج = عزم $\vec{ق}_1$ حول ء = $\vec{ءحـ} \times \vec{ق}_1$

= [(٢ ، −١) − (٠ ، −٢)] × (٥ ، −٣)

= (٢ ، ١) × (٥ ، −٣) = $-١١\,\vec{ع}$

∴ $\|\vec{ع}\| = ١١$ ، ∵ $\|\vec{ق}_1\| = \sqrt{٢٥ + ٩} = \sqrt{٣٤}$

∴ البعد العمودى بين خطى عمل القوتين = $\frac{\|\vec{ع}\|}{\|\vec{ق}_1\|} = \frac{١١}{\sqrt{٣٤}}$

= $\frac{١١}{٣٤}\sqrt{٣٤}$ وحدة طول

(٩) أثرت القوة : $\vec{ق}_1 = ٦\,\vec{ص}$ فى نقطة الأصل كما أثرت القوة : $\vec{ق}_2 = -٦\,\vec{ص}$ فى النقطة (٢ ، ٠) بين أن مجموع عزوم القوى بالنسبة لأى نقطة (س ، ص) لا يعتمد على س ، ص

الحل

∵ $\vec{ق}_1$ = (٠ ، ٦) تؤثر فى النقطة (٠ ، ٠)

∴ عزمها بالنسبة للنقطة (س ، ص)

= [(٠ ، ٠) − (س ، ص)] × (٠ ، ٦)

= (−س ، −ص) × (٠ ، ٦) = $(-٦\,س)\,\vec{ع}$

∵ $\vec{ق}_2$ = (٠ ، −٦) تؤثر فى النقطة (٢ ، ٠)

∴ عزمها بالنسبة للنقطة (س ، ص)

= [(٢ ، ٠) − (س ، ص)] × (٠ ، −٦)

= (٢ − س ، −ص) × (٠ ، −٦) = $(-١٢ + ٦\,س)\,\vec{ع}$

∴ مجموع عزوم القوى بالنسبة للنقطة (س ، ص)

= $(-٦\,س)\,\vec{ع} + (-١٢ + ٦\,س)\,\vec{ع} = -١٢\,\vec{ع}$

∴ مجموع عزوم القوى لا يعتمد على س ، ص

(١٠) أثرت القوى $\vec{ق}_1 = ٢\,\vec{س} - ٤\,\vec{ص}$ ، $\vec{ق}_2 = \vec{س} - ٣\,\vec{ص}$ ، $\vec{ق}_3 = -٣\,\vec{س} + ٧\,\vec{ص}$ فى النقط أ (−١ ، ١) ، ب (−٢ ، ٣) ، حـ (٠ ، ١) على الترتيب برهن أن هذه المجموعة من القوى تكافئ ازدواجاً و أوجد معيار عزمه

الحل

∵ $\vec{وأ}$ = (−١ ، ١) − (٠ ، ٠) = (−١ ، ١)

، $\vec{وب}$ = (−٢ ، ٣) − (٠ ، ٠) = (−٢ ، ٣)

، $\vec{وحـ}$ = (٠ ، ١) − (٠ ، ٠) = (٠ ، ١)

∴ $\vec{ع}_و = \vec{وأ} \times \vec{ق}_1 + \vec{وب} \times \vec{ق}_2 + \vec{وحـ} \times \vec{ق}_3$

= (−١ ، ١) × (٢ ، −٤) + (−٢ ، ٣) × (١ ، −٣)

+ (٠ ، ١) × (−٣ ، ٧) = $٢\,\vec{ع} + ٣\,\vec{ع} + ٣\,\vec{ع} = ٨\,\vec{ع}$ (١)

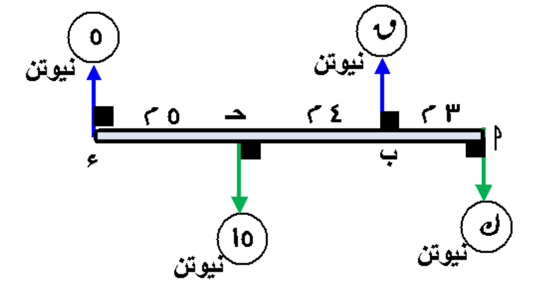
، ∵ $\vec{ح} = \vec{ق}_1 + \vec{ق}_2 + \vec{ق}_3 = \vec{0}$ (٢)

∴ من (١) ، (٢) ينتج أن :

المجموعة تكافئ ازدواجاً معيار عزمه = ٨ وحدة عزم

أحمد الشتوى

(١١) الشكل المقابل : يوضح مجموعة من القوى المؤثرة على قضيب ؉ ء تكون ازدواج القياس الجبرى لعزمه يساوى – ٧٥ نيوتن .م. أوجد قيمة كل من ق ، ك



الحل

نفرض $\overrightarrow{\text{ى}}$ متجه وحدة رأسياً لأعلى

∴ $\overrightarrow{\text{ح}}$ = (ق + ٥ – ك – ١٥) $\overrightarrow{\text{ى}}$

∴ ح = ق – ك – ١٠

، ∵ المجموعة تكون ازدواج ∴ ق – ك = ١٠ (١)

، ∵ القياس الجبرى لعزم الازدواج = – ٧٥ نيوتن.م

∴ $\text{ح}_{\text{؉}}$ = – ٧٥

∴ ١٥ × ٧ – ق × ٣ – ٥ × ١٢ = – ٧٥

∴ ١٠٥ – ٣ ق – ٦٠ = – ٧٥

∴ ٣ ق = ١٢٠ ∴ ق = ٤٠ نيوتن

، من (١) ينتج : ك = ٣٠ نيوتن

حل اختبار تراكمى صفحة ٩٧ بالكتاب المدرسى

أختر الاجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة

(١) إذا كانت قوتان مقدارهما ٤ ، ٨ نيوتن تؤثران فى نقطة و قياس الزاوية بينهما ١٢٠° فإن مقدار محصلتهما يساوى .... نيوتن

(؉) ١٢ (ب) ٤ (حـ) ٤ √٣ (ء) – ٨ √٣

(٢) إذا كانت قوتان متوازيتان و متحدتا الاتجاه مقدارهما ٥ ، ٧ نيوتن تؤثران فى نقطتى ؉ ، ب فإن مقدار محصلتهما يساوى ....

(؉) ١٢ (ب) ٢ (حـ) √٧٤ (ء) √٢٤

(٣) إذا كانت القوة $\overrightarrow{\text{ق}}$ = ٢ $\overrightarrow{\text{س}}$ – ٣ $\overrightarrow{\text{ص}}$ تؤثر فى النقطة (١ ، –٢) فإن عزم $\overrightarrow{\text{ق}}$ بالنسبة للنقطة ب (–١ ، ٤) يساوى ....

(؉) – ٦ $\overrightarrow{\text{ع}}$ (ب) ٦ $\overrightarrow{\text{ع}}$ (حـ) ٢٢ $\overrightarrow{\text{ع}}$ (ء) – ٢٢ $\overrightarrow{\text{ع}}$

(٤) إذا كانت القوة $\overrightarrow{\text{ق}}$ = $\overrightarrow{\text{س}}$ + ٢ $\overrightarrow{\text{ص}}$ – ٣ $\overrightarrow{\text{ع}}$ تؤثر في النقطة ؉ (٢ ، –١ ، ٣) فإن عزم $\overrightarrow{\text{ق}}$ بالنسبة لنقطة الأصل يساوى

(؉) – ٣ $\overrightarrow{\text{س}}$ + ٩ $\overrightarrow{\text{ص}}$ + ٥ $\overrightarrow{\text{ع}}$ (ب) – $\overrightarrow{\text{س}}$ – ٢ $\overrightarrow{\text{ص}}$ + $\overrightarrow{\text{ع}}$

(حـ) ٣ $\overrightarrow{\text{س}}$ – ٩ $\overrightarrow{\text{ص}}$ – ٥ $\overrightarrow{\text{ع}}$ (ء) ٢ $\overrightarrow{\text{س}}$ – ٥ $\overrightarrow{\text{ص}}$ + $\overrightarrow{\text{ع}}$

(٥) إذا أتزنت ثلاث قوى مستوية و متساوية في المقدار و متلاقية في نقطة فإن قياس الزاوية بين أى قوتين منهما يساوى ....

(؉) ٣٠° (ب) ٦٠° (حـ) ٩٠° (ء) ١٢٠°

الحل

(١) ∵ $\text{ح}^2 = \text{ق}_1^2 + \text{ق}_2^2 + ٢\,\text{ق}_1\,\text{ق}_2$ حتا ى

∴ ح^2 = ١٦ + ٦٤ + ٢ × ٤ × ٨ × (– ½) = ٤٨ ∴ ح = ٤ √٣

(٢) بفرض $\overrightarrow{ى}$ متجه وحدة فى اتجاه

∴ $\overrightarrow{ح} = \overrightarrow{ق_١} + \overrightarrow{ق_٢} = ٥\,\overrightarrow{ى} + ٧\,\overrightarrow{ى} = ١٢\,\overrightarrow{ى}$

أى أن : مقدار محصلة القوتين = ١٢ نيوتن

(٣) $\overrightarrow{ر} = \overrightarrow{ب أ} = \overrightarrow{أ} - \overrightarrow{ب} = (١ ، -٢) - (-١ ، ٤) = (٢ ، -٦)$

∴ $\overrightarrow{جـ_ب} = \overrightarrow{ر} \times \overrightarrow{ق} = (٢ ، -٦) \times (٢ ، -٣) = ٦\,\overrightarrow{ع}$

(٤) $\overrightarrow{جـ_و} = (٢ ، -١ ، ٣) \times (١ ، ٢ ، -٣)$

$$= \begin{vmatrix} \overrightarrow{س} & \overrightarrow{ص} & \overrightarrow{ع} \\ ٢ & -١ & ٣ \\ ١ & ٢ & -٣ \end{vmatrix} = -٣\,\overrightarrow{س} + ٩\,\overrightarrow{ص} + ٥\,\overrightarrow{ع}$$

(٥) بفرض أن مقدار كل قوة = ق ∴ احدى القوى هى محصلة القوتين الأخريين

∴ $ق^٢ = ق^٢ + ق^٢ + ٢\,ق\,ق$ حتا ى

∴ $ق^٢ = ٢\,ق^٢ + ٢\,ق^٢$ حتا ى ∴ $-\,ق^٢ = ٢\,ق^٢$ حتا ى

∴ حتا ى $= -\frac{١}{٢}$ ∴ ى = ١٢٠°

أى أن : قياس الزاوية بين أى قوتين من القوى الثلاثة = ١٢٠°

(٦) الشكل المقابل : يوضح قضيباً منتظماً أ ب فى حالة اتزان تحت تأثير القوى الموضحة أوجد ق ، ك

الحل

∵ القضيب متزن

∴ ق + ك = ٢٠ (١)

، $جـ_ب = ٠$ ∴ ق × ١٠٠ حتا ٣٠° − ٢٠ × ٥٠ حتا ٣٠° = ٠

∴ ق = ١٠ نيوتن ، من (١) ينتج : ك = ١٠ نيوتن

(٧) إذا كانت $\overrightarrow{ق} = ل\,\overrightarrow{س} + م\,\overrightarrow{ص}$ تؤثر فى النقطة (٣ ، −٢) فإذا كان عزم $\overrightarrow{ق}$ بالنسبة لنقطة الأصل يساوى $\overrightarrow{٠}$ و بالنسبة لنقطة ب (−١ ، ٢) يساوى $-٨\,\overrightarrow{ع}$ أوجد قيمة كل من ل ، م

الحل

∵ $\overrightarrow{و أ} = (٣ ، -٢) - (٠ ، ٠) = (٣ ، -٢)$

، $\overrightarrow{ب أ} = (٣ ، -٢) - (-١ ، ٢) = (٤ ، -٤)$

، ∵ $\overrightarrow{جـ_و} = \overrightarrow{٠}$ ∴ $(٣ ، -٢) \times (ل ، م) = \overrightarrow{٠}$

∴ ٣ م + ٢ ل = ٠ (١) ، ∵ $\overrightarrow{جـ_ب} = -٨\,\overrightarrow{ع}$

∴ $(٤ ، -٤) \times (ل ، م) = -٨\,\overrightarrow{ع}$ ∴ ٤ م + ٤ ل = −٨ (٢)

بضرب (١) × (−٢) و جمعها مع (٢) ينتج : م = ٤

، بالتعويض فى (١) ينتج : ل = −٦

(٢) إذا كانت $\overrightarrow{ق} = \overrightarrow{س} + ب\,\overrightarrow{ص} + حـ\,\overrightarrow{ع}$ تؤثر فى النقطة أ (−٢ ، ١ ، ٢) و كانت مركبتا عزم $\overrightarrow{ق}$ بالنسبة لمحورى ص ، ع هما ٢ ، −٣ على الترتيب أوجد قيمة كل من ب ، حـ

الحل

∵ $ق_س = ١$ ، $ق_ص = ب$ ، $ق_ع = حـ$ ، س = −٢ ، ص = ١ ، ع = ٢

، ∵ مركبة عزم القوة حول ص = $ع\,ق_س - س\,ق_ع$

∴ ٢ = ٢ × ١ − (−٢) × حـ

∴ ٢ = ٢ + ٢ حـ ∴ حـ = ٠

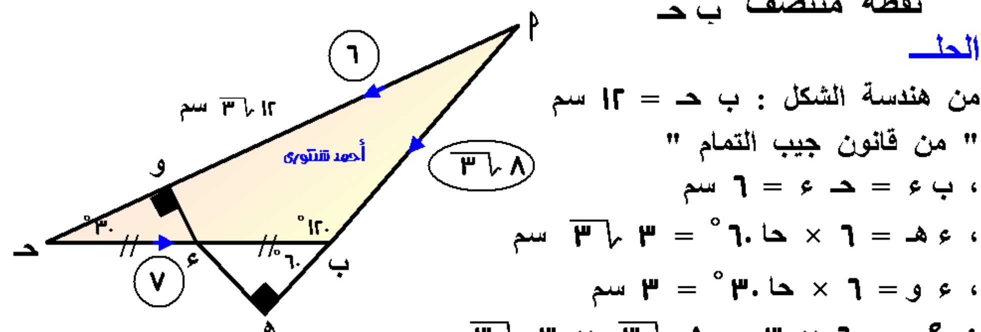
، ∵ مركبة عزم القوة حول ع = $س\,ق_ص - ص\,ق_س$

∴ −٣ = (−٢) × ب − ١ × ١

∴ −٣ = −٢ ب − ١ ∴ ب = ١

(٩) ا ب حـ مثلث متساوى الساقين فيه ق (∠ ب) = ١٢٠° ، ا حـ = ١٢ √٣ سم ، أثرت قوى مقاديرها ٦ ، ٧ ، ٨ √٣ نيوتن فى ا حـ→ ، حـ ب→ ، ب ا→ على الترتيب أوجد مجموع عزوم القوى حول نقطة منتصف ب حـ

الحل



من هندسة الشكل : ب حـ = ١٢ سم

" من قانون جيب التمام "

، ب ء = ء حـ = ٦ سم

، ء هـ = ٦ × حا ٦٠° = ٣ √٣ سم

، ء و = ٦ × حا ٣٠° = ٣ سم

∴ ع ء = ٦ × ٣ − ٨ √٣ × ٣ √٣

= ١٨ − ٧٢ = − ٥٤ نيوتن . سم

(١٠) ا ، ب ، حـ ثلاث نقط على استقامة واحدة حيث ا ب = ٦ سم ، ب حـ = ٤ سم ، حـ ∈ ا ب أثرت قوتان متوازيتان فى النقطتين ا ، ب مقدار محصلتهما يساوى ٢٤ سم و تؤثر فى نقطة حـ أوجد مقدار كل من القوتين

الحل

بفرض أن القوتين هما ق١→ ، ق٢→

، ى→ متجه وحدة فى اتجاه القوتين

∴ ق١→ = ق١ ى→ ، ق٢→ = ق٢ ى→

، ح→ = (ق١ + ق٢) ى→ ∴ ٢٤ ى→ = (ق١ + ق٢) ى→

∴ ق١ + ق٢ = ٢٤ (١) ، ق١ × ٢ = ق٢ × ٤ ∴ ق١ = ٢ ق٢

، بالتعويض فى (١) ينتج : ٣ ق٢ = ٢٤ ∴ ق٢ = ٨ نيوتن ، ق١ = ١٦ نيوتن

(١٣) تؤثر القوى المستوية المتوازية ق١→ ، ق٢→ ، ق٣→ ، ق٤→ فى النقط ا (١ ، ١) ، ب (−٢ ، ١) ، حـ (٣ ، ٣) ، ء (−٢ ، ٠) على الترتيب ، فإذا كانت القوى متزنة و كان ق١→ = س→ + ٢ ص→ ، || ق٢→ || = ٢ √٥ نيوتن فى عكس اتجاه ق١→ أوجد كلاً من : ق٢→ ، ق٣→ ، ق٤→

الحل

∵ ق١→ // ق٢→ ∴ ق٢→ = ل ق١→

∴ || ق٢→ || = || ل ق١→ || = | ل | × || ق١→ || (١)

، ∵ ق١→ = س→ + ٢ ص→ ∴ || ق١→ || = √(١ + ٤) = √٥

، ∵ || ق٢→ || = ٢ √٥ ∴ من (١) : ٢ √٥ = | ل | × √٥ ∴ | ل | = ٢

∴ ل = ± ٢ ، ∵ ق٢→ فى عكس اتجاه ق١→ ∴ ل = − ٢

∴ ق٢→ = − ٢ ق١→ = (−٢ ، −٤) ، ∵ ق٣→ // ق٤→ // ق١→

∴ ق٣→ = (م ، ٢م) ، ق٤→ = (ن ، ٢ن)

، ∵ القوى متزنة ∴ مجموع عزوم القوى حول نقطة ء = ٠ .

∴ ء ا→ × ق١→ + ء ب→ × ق٢→ + ء حـ→ × ق٣→ = ٠→

∴ [(١ ، ١) − (−٢ ، ٠)] × (١ ، ٢) + [(−٢ ، ١) − (−٢ ، ٠)] × (−٢ ، −٤) + [(٣ ، ٣) − (−٢ ، ٠)] × (م ، ٢م) = ٠→

∴ (٣ ، ١) × (١ ، ٢) + (٠ ، ١) × (−٢ ، −٤) + (٥ ، ٣) × (م ، ٢م) = ٠→

∴ (٥ + ٢ + ٧م) ع→ = ٠→ و منها : م = − ١

∴ ق٣→ = (−١ ، −٢) ، ∵ القوى متزنة ∴ ح→ = ٠→

∴ ق١→ + ق٢→ + ق٣→ + ق٤→ = ٠→ ∴ ق٤→ = − (ق١→ + ق٢→ + ق٣→)

∴ ق٤→ = − [(١ ، ٢) + (−٢ ، −٤) + (−١ ، −٢)] = (٢ ، ٤)

اجابة أسئلة الاختبارات الخاصة بالوحدة

الاختبار الأول

السؤال الأول : أختر الاجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة

(٤) قوتان تكونان ازدواج ، مقدار احداهما ١٥ نيوتن و عزم الازدواج المحصل منهما ٤٥ نيوتن . سم فإن :
البعد العمودى بينهما يساوى ....

(أ) ٦٧٥ سم (ب) ٦٠ سم (حـ) ٣ سم (ء) ٣٠ سم

الحل

بفرض أن :
البعد العمودى بين القوتين = ل سم
∵ القوتان تكونان ازدواجاً
∴ ق = ١٥ نيوتن
، ∵ عزم الازدواج المحصل = ٤٥ نيوتن . سم
∴ ١٥ × ل = ٤٥ و منها : ل = ٣ سم

السؤال الثالث :

(٢) أ ب حـ مثلث متساوى الساقين فيه أ ب = أ حـ = ١٣ سم ، ب حـ = ١٠ سم ، اثرت القوى ٦٥ ، ق ، ٦٥ نيوتن فى $\overleftarrow{أب}$ ، $\overleftarrow{بحـ}$ ، $\overleftarrow{أحـ}$ على الترتيب ، فإذا كانت مجموعة القوى تكافئ ازدواج فما قيمة ق ، و معيار عزم الازدواج

الحل

∵ القوى تؤثر فى أضلاع مثلث و مأخوذة فى ترتيب دورى واحد ، و تكافئ ازدواجاً
∴ م = مقدار القوة الممثل لوحدة الأطوال = $\frac{٦٥}{١٣}$
= ٥
∴ $\frac{ق}{١٠}$ = ٥ و منها : ق = ٥٠ نيوتن
، هندسة الشكل : أ ء = ١٢ سم (فيثاغورث)
، معيار عزم الازدواج = ٢ مـ (△ أ ب حـ) × م
= ٢ × $\frac{١}{٢}$ × أ ب × أ حـ × حا أ × م
= ٢ × $\frac{١}{٢}$ × أ ب × أ حـ × ٢ حا $\frac{١}{٢}$ أ حتا $\frac{١}{٢}$ أ × م
∴ معيار عزم الازدواج = ٢ × $\frac{١}{٢}$ × ١٣ × ١٣ × ٢ × $\frac{٥}{١٣}$ × $\frac{١٢}{١٣}$ × ٥
= ٦٠٠ نيوتن . سم

الاختبار الثانى

السؤال الأول : أختر الاجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة

(١) يؤثر على الجسم ازدواجان الأول مقدار احدى قوتيه ٢٠ ث كجم و ذراع العزم $\frac{١}{٢}$ متر و اتجاه دورانه فى عكس اتجاه دوران الساعة و الثانى مقدار احدى قوتيه ٣٠ ث كجم و ذراع العزم ١ متر و اتجاه دورانه فى اتجاه دوران الساعة
فإن : الازدواج المحصل يساوى ....

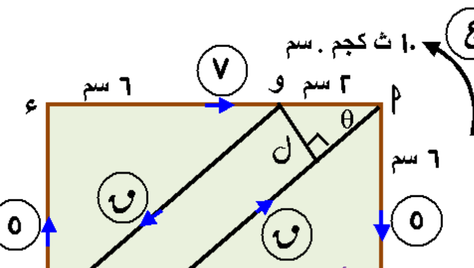
(أ) ٢٠ ث كجم . م و اتجاه دورانه فى اتجاه دوران الساعة
(ب) ٢٠ ث كجم . م و اتجاه دورانه فى عكس اتجاه دوران الساعة
(حـ) ٤٠ ث كجم . م و اتجاه دورانه فى اتجاه دوران الساعة
(ء) ٤٠ ث كجم . م و اتجاه دورانه فى عكس اتجاه دوران الساعة

الحل

الازدواج المحصل = ٢٠ × $\frac{١}{٢}$ − ٣٠ × ١ = − ٢٠ ث كجم . م
∴ الازدواج المحصل = ٢٠ ث كجم . م و اتجاه دورانه فى اتجاه دوران الساعة

(٢) ا ب حـ ء مستطيل فيه ا ب = ٦ سم ، ب حـ = ٨ سم ،
هـ ∈ ب حـ ، و ∈ ا ء بحيث ب هـ = ء و = ٦ سم أثرت قوى
مقاديرها ٥ ، ٥ ، ٧ ، ٧ ، ق ، ق ث كجم فى اتجاهات ا ب
، حـ ء ، ب حـ ، ء ا ، هـ ا ، و حـ على الترتيب فإذا كانت
المجموعة تكافئ ازدواج معيار عزمه ١٠ ث كجم . سم فى اتجاه
حـ ب ا ء أوجد ق

الحل



القوتان (٥ ، ٥) تكونان ازدواجاً
القياس الجبرى لعزمه
ع١ = – ٥ × ٨ = – ٤٠ ث كجم . سم
القوتان (٧ ، ٧) تكونان ازدواجاً
القياس الجبرى لعزمه
ع٢ = – ٧ × ٦ = – ٤٢ ث كجم . سم
القوتان (ق ، ق) تكونان ازدواجاً القياس الجبرى لعزمه
ع٣ = ق × ل ث كجم . سم
من هندسة الشكل : ل = ا ء حتا θ = ٢ حتا ٤٥°
∴ ع٣ = ٢ ق حتا ٤٥°
، ∵ المجموعة تكافئ ازدواجاً القياس الجبرى لعزمه = ١٠ ث كجم . سم
∴ ١٠ = ٢ ق حتا ٤٥° – ٤٠ – ٤٢
∴ ٩٢ = ٢ ق × $\frac{1}{\sqrt{2}}$
و منها : ق = ٤٦ $\sqrt{2}$ ث كجم

الاختبار الثالث

السؤال الأول : أختر الاجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة

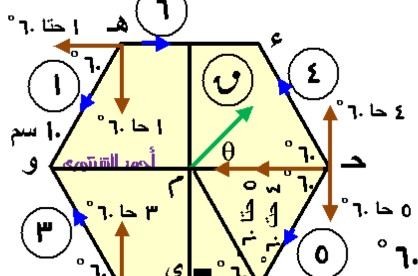
(٤) فى الشكل المقابل :
عزم الازدواج الناتج من القوتين
٥٠ ، ٥٠ نيوتن يساوى ....

الحل
ع = ٥٠ × ٦٠ = ٣٠٠٠ نيوتن . سم

السؤال الثالث :

(٢) ا ب حـ ء هـ و مسدس منتظم طول ضلعه ١٠ سم أثرت قوى مقاديرها
٢ ، ٥ ، ٤ ، ٦ ، ١ ، ٣ نيوتن فى ا ب ، ب حـ ، حـ ء ،
ء هـ ، هـ و ، ا و على الترتيب اوجد مقدار و اتجاه القوة
التى يجب أن تؤثر فى مركز المسدس حتى تؤول المجموعة إلى
ازدواج ثم عين عزمه

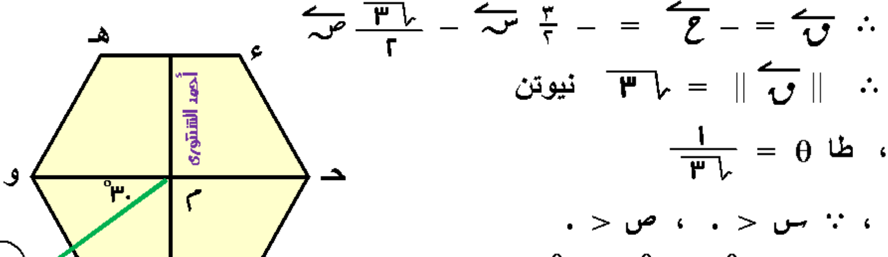
الحل



نفرض س ، ص متجها وحدة في اتجاه
م حـ و العمودى عليه ، و بتحليل القوى
كما بالشكل المقابل ينتج :
س = ٢ + ٦ – ٣ حتا ٦٠°
– ١ حتا ٦٠° – ٤ حتا ٦٠° – ٥ حتا ٦٠°
= ٨ – ١٣ حتا ٦٠° = $\frac{3}{2}$
ص = ٣ حا ٦٠° – ١ حا ٦٠° – ٥ حا ٦٠° + ٤ حا ٦٠°
= $\frac{\sqrt{3}}{2}$
∴ ع = $\frac{3}{2}$ س + $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ص



، ∵ المجموعة تؤول إلى ازدواج



∴ $\overleftarrow{و} = -\overleftarrow{ح} = -\frac{٣}{٢}\overleftarrow{س} - \frac{\sqrt{٣}}{٢}\overleftarrow{ص}$

∴ $\|\overleftarrow{و}\| = \sqrt{٣}$ نيوتن

، ظا θ = $\frac{١}{\sqrt{٣}}$

، ∵ س < ٠ ، ص < ٠

∴ θ = ١٨٠° + ٣٠° = ٢١٠°



أى خط عمل القوة عمودى على $\overleftarrow{ⱨ و}$

، خواص المسدس المنتظم : ى م = $\frac{١}{٢}$ ⱨ ب ظا ٦٠°

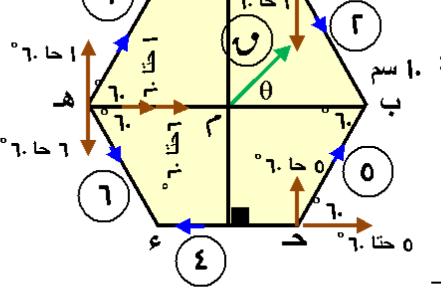
= ٥ $\sqrt{٣}$ سم

∴ البعد العمودى بين مركز المسدس و أضلاعه = ٥ $\sqrt{٣}$ سم

∴ $ع_م$ = (٢ − ٥ + ٤ − ٦ + ١ − ٣) × ٥ $\sqrt{٣}$

= − ٣٥ $\sqrt{٣}$ نيوتن . سم

حل آخر لايجاد مقدار و اتجاه القوة



نفرض $\overleftarrow{س}$ ، $\overleftarrow{ص}$ متجها وحدة في اتجاه $\overleftarrow{م ب}$ و العمودى عليه

و بتحليل القوى كما بالشكل المقابل ينتج :

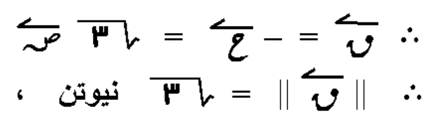
س = ٢ حتا ٦٠° + ٥ حتا ٦٠° − ٤ + ٦ حتا ٦٠° + ١ حتا ٦٠° − ٣

= ١٤ حتا ٦٠° − ٧ = صفر

ص = − ٢ حا ٦٠° + ٥ حا ٦٠° − ٦ حا ٦٠° + ١ حا ٦٠° = − $\sqrt{٣}$

∴ $\overleftarrow{ح} = -\sqrt{٣}\,\overleftarrow{ص}$

، ∵ المجموعة تؤول إلى ازدواج



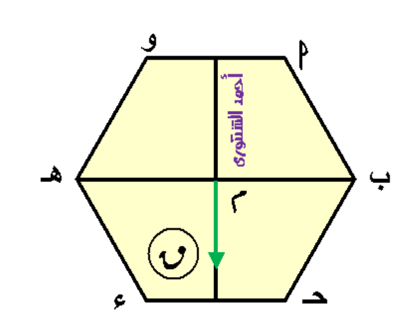
∴ $\overleftarrow{و} = -\overleftarrow{ح} = \sqrt{٣}\,\overleftarrow{ص}$

∴ $\|\overleftarrow{و}\| = \sqrt{٣}$ نيوتن ،

ظا θ = غير معرف

، ∵ س = ٠ ، ص > ٠ ∴ θ = ٢٧٠°

أى خط عمل القوة عمودى على $\overleftarrow{ⱨ و}$



الاختبار الرابع

السؤال الأول : أختر الاجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة

(٤) عزم الازدواج المقابل يساوى ....

(ⱨ) ٨٠٠ نيوتن . سم (ب) ٨٠ نيوتن . سم

(حـ) ٤٠٠ $\sqrt{٣}$ نيوتن . سم (ء) ٤٠ $\sqrt{٣}$ نيوتن . سم

الحل

ع = ١٠ × ٨٠ حا ٦٠° = ٤٠٠ $\sqrt{٣}$ نيوتن . سم

السؤال الثالث :

(٢) ⱨ ب حـ صفيحة منتظمة على شكل مثلث متساوى الأضلاع طول ضلعه ٣٠ $\sqrt{٣}$ سم ، و وزنها ٥٠ ث جم علقت الصفيحة من مسمار أفقى من بالقرب من الرأس ⱨ فاتزنت رأسياً ، اثر على الصفيحة ازدواج عمودى على مستوى الصفيحة فاتزنت الصفيحة فى وضع يكون فيه $\overline{ⱨ ب}$ أفقياً اوجد عزم الازدواج المؤثر و رد الفعل على المسمار

الحل

∵ الصفيحة متزنة تحت تأثير ع ، ر ، ٥٠

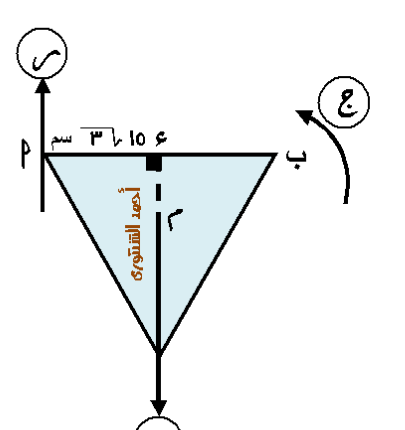
∴ القوتان (ر ، ٥٠) تكونان ازدواجاً

، ∵ (٥٠) يؤثر رأسياً لأسفل

∴ ر = ٥٠ ث جم و يؤثر رأسياً لأعلى

، ع = ٥٠ × أء = ٥٠ × ١٥ √٣





الاختبار الخامس

السؤال الأول : أختر الاجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة

(٤) إذا كونت القوتان ق١→ = أ س→ + ٥ ص→ ، ق٢→ = ٣ س→ − ب ص→ ازدواج فإن : أ + ب = ...

الحل

∵ ق١→ ، ق٢→ تكونان ازدواج   ∴ ق١→ = − ق٢→

∴ أ س→ + ٥ ص→ = − ٣ س→ + ب ص→

∴ أ = − ٣ ، ب = ٥   ∴ أ + ب = ٢

السؤال الخامس :

(٢) قوتان ق١→ = ٢ س→ − ص→ ، ق٢→ = س→ − ٢ ص→ تؤثران فى النقطتين أ (١ ، ١) ، ب (٠ ، − ٤) على الترتيب

اوجد عزم المجموعة حول أى نقطة فى المستوى

الحل

∵ ق١→ = (٢ ، − ١) ، ق٢→ = (− ٢ ، ١) ∴ ق١→ = − ق٢→

∴ ق١→ // ق٢→ و تضادها فى الاتجاه ، || ق١→ || = || ق٢→ ||

∴ المجموعة تكون ازدواج

، ج→و = و أ→ × ق١→ + و ب→ × ق٢→

= (١ ، ١) × (٢ ، − ١) + (٠ ، − ٤) × (− ٢ ، ١)

= − ٣ ع→ − ٨ ع→ = − ١١ ع→

تم بحمد الله و عونه

أحمد الشتورى

المتميز

فى
الرياضيات التطبيقية
الأستاتيكا

الجزء النظرى
و
حلول التمارين
الوحدة السادسة

م س ر	$جـ_{و}$	($س_{م}$ ، $ص_{م}$)	‖ $\overrightarrow{ق}$ ‖

إعداد : أحمد الشنتورى

الصف الثالث الثانوى
القسم العلمى
شعبة الرياضيات

٢٠١٧ / ٢٠١٨

الوحدة السادسة .... مركز الثقل

٦ – ١ مركز الثقل

تمهيد :

نعلم أن **الجسم الجاسئ** : هو الجسم المكون من عدد كبير جداً من الجسيمات المترابطة مع بعضها البعض بحيث أن المسافة بين أى جسمين منها تكون ثابتة و لا تتأثر بأى مؤثر خارجي

و إذا تحرك جسم كبير بشكل انتقالى فقط فإن كل نقطة منه تتحرك بنفس الشكل تماماً و بالتالى يمكن اعتبار هذا الجسم مكافئاً لنقطة واحدة ممكن في هذه الحالة

أما إذا تحرك جسم كبير عشوائياً (كانتقال و دوران) فإن كل نقطة منه تتحرك بشكل مختلف عن غيرها

مركز ثقل الجسم الجاسئ :

تعريف :

مركز ثقل جسم جاسئ هو نقطة ثابتة فى الجسم يمر بها خط عمل محصلة أوزان الجسيمات التى يتكون منها الجسم ، و لا يتغير موضعها بالنسبة للجسم مهما تغير موضعه بالنسبة للأرض

ثقل الجسم و مركز ثقله و الجاذبية الأرضية :

أى جسم بوجه عام يعتبر مجموعة من النقط المادية و بالتالى فإن تأثير الجاذبية الأرضية عليه بقوة وزنه تكون عند كل نقطة من هذه النقاط ، و باعتبار أن الأرض كرة متجانسة ، فإن وزن كل نقطة من هذه النقاط يعمل فى المستقيم الواصل بين هذه النقطة و مركز الأرض ، و لما كانت الأجسام صغيرة جداً بالنسبة للأرض و نظراً لبعدها الكبير عن مركز الأرض فإنه يمكن اعتبار خطوط عمل أوزان النقط المادية المكونة لجسم ما متوازية و بذلك يمكن تركيبها فى قوة وحيدة تساوى من حيث المقدار مجموع أوزان هذه النقاط و تعمل رأسياً إلى أسفل نحو الأرض

من الطبيعى أن الجاذبية الأرضية تؤثر فى جميع أجزاء الجسم ، و لكن عند أخذ العزوم تؤثر قوة الجاذبية الأرضية (وزن الجسم) فى نقطة واحدة فيه تسمى بمركز ثقل الجسم

مركز ثقل نظام من الجسيمات :

باعتبار أن : $ا_{١}$ ، $ا_{٢}$ ، $ا_{٣}$ ، .... مجموعة من الجسيمات المكونة لجسم جاسئ ، و أن : $و_{١}$ ، $و_{٢}$ ، $و_{٣}$ ، .... هى أوزان هذه الجسيمات على الترتيب و تؤثر رأسياً لأسفل كما بالشكل المقابل فيكون :

١) محصلة القوتين المتوازيتين $و_{١}$ ، $و_{٢}$ المؤثرتين عند $ا_{١}$ ، $ا_{٢}$ على الترتيب و تمر بالنقطة $م_{١}$ هى : ($و_{١}$ + $و_{٢}$) لذلك فإن : $و_{١}$ × $ا_{١}م_{١}$ = $و_{٢}$ × $ا_{٢}م_{١}$ مهما كان وضع الجسم بالنسبة للأرض و ذلك لأن البعد بين النقطتين $ا_{١}$ ، $ا_{٢}$ ثابت لأن الجسم جاسئ و تظل $م_{١}$ ثابتة

٢) محصلة القوتين المتوازيتين ($و_{١}$ + $و_{٢}$) ، $و_{٣}$ هى : ($و_{١}$ + $و_{٢}$ + $و_{٣}$) و نفرض أن نقطة تأثيرها $م_{٢}$ لذلك فإن : $و_{٣}$ × $ا_{٣}م_{٢}$ = ($و_{١}$ + $و_{٢}$) × $م_{١}م_{٢}$ و تظل المسافة $ا_{٣}م_{١}$ ثابتة ، و بالتالى فإن : $م_{٢}$ نقطة ثابتة مهما كان وضع الجسيمات عند النقاط $ا_{١}$ ، $ا_{٢}$ ، $ا_{٣}$

٣) بتكرار العمل السابق بالنسبة لأوزان جميع الجسيمات المكونة

للجسم نحصل على وزن الجسم ، و نجد أنه يساوى مجموع جميع أوزان الجسيمات و يمر دائماً بنقطة ثابتة الوضع

ملاحظة :
مركز ثقل الجسم الجاسئ يتغير بتغير شكله ، و ذلك لتغير الأبعاد بين الجسيمات المكونة له

الجسم المنتظم الكثافة :
هو الجسم الذى تكون كتلته وحدة الأطوال أو المساحات أو الحجوم المأخوذة من أى جزء منه ثابتة

ملاحظات :
(١) إذا كان السلك (أو القضيب) منتظم الكثافة فإن وزنه يتناسب مع طوله
(٢) إذا كانت الصفيحة رقيقة منتظمة فإن وزنها يتناسب مع مساحتها

مركز ثقل نقطتين ماديتين (جسيمين) :
إذا كانت كتلة الجسيمين هما : $\text{ك}_{١}$ ، $\text{ك}_{٢}$ فى الموضعين $\text{س}_{١}$ ، $\text{س}_{٢}$ على محور السينات على الترتيب بالنسبة لراصد موجود عند نقطة الأصل كما بالشكل المقابل

ك١ ، ك٢ ، س١ ، س٢

فإن : مركز ثقل هذين الجسيمين بالنسبة للراصد تتحدد بالعلاقة :

$$\text{س}_{م} = \frac{\text{ك}_{١}\,\text{س}_{١} + \text{ك}_{٢}\,\text{س}_{٢}}{\text{ك}_{١} + \text{ك}_{٢}}$$

إجابة حاول أن تحل (١) صفحة ١٠٢
جسيمين ماديين كتلة كل منهما ٣ نيوتن ، ٥ نيوتن و المسافة بينهما ٨ أمتار ، أوجد مركز ثقل الجسيمين بالنسبة للجسم ٣ نيوتن

الحـــل

٥ نيوتن ، ٨ متر ، ٣ نيوتن
س = ٨ ، س = ٠

باعتبار أن الخط الواصل بين الجسيمين يقع على محور السينات و أن نقطة الأصل تقع عند الجسيم ٣ نيوتن فيكون : $\text{س}_{١} = ٠$ ، $\text{س}_{٢} = ٨$ ، $\text{ك}_{١} = ٣$ ، $\text{ك}_{٢} = ٥$

$$\therefore \text{س}_{م} = \frac{٣ \times ٠ + ٥ \times ٨}{٣ + ٥} = ٥$$

أى أن : مركز ثقل الجسيمين الماديين يقع على بعد ٥ متر من الجسم ٣ نيوتن و على بعد ٣ متر من الجسم ٥ نيوتن

ملاحظة :
مركز ثقل نقطتين ماديتين تفصل بينهما مسافة ثابتة يقع على القطعة المستقيمة الواصلة بينهما و يقسم طولها بنسبة عكسية لنسبة كتليهما

متجه موضع مركز الثقل للجسم الجاسئ بالنسبة لنقطة الأصل :
إذا كانت : $\text{و}_{١}$ ، $\text{و}_{٢}$ ، $\text{و}_{٣}$ ، .... ، $\text{و}_{ن}$ أوزان الجسيمات المكونة للجسم الجاسئ ، $\overrightarrow{\text{ر}}_{١}$ ، $\overrightarrow{\text{ر}}_{٢}$ ، $\overrightarrow{\text{ر}}_{٣}$ ، .... ، $\overrightarrow{\text{ر}}_{ن}$ متجهات مواضع هذه الجسيمات منسوبة إلى نقطة الأصل

فإن : متجه الموضع $\overrightarrow{\text{ر}}$ لمركز ثقل الجسم الجاسئ منسوباً إلى نقطة الأصل يتحدد بالعلاقة :

$$\overrightarrow{\text{ر}}_{م} = \frac{\text{و}_{١}\overrightarrow{\text{ر}}_{١} + \text{و}_{٢}\overrightarrow{\text{ر}}_{٢} + \text{و}_{٣}\overrightarrow{\text{ر}}_{٣} + \dots + \text{و}_{ن}\overrightarrow{\text{ر}}_{ن}}{\text{و}_{١} + \text{و}_{٢} + \text{و}_{٣} + \dots + \text{و}_{ن}} \qquad (١)$$

$\because$ $\text{و}_{١} = \text{ك}_{١}\,\text{ء}$ ، $\text{و}_{٢} = \text{ك}_{٢}\,\text{ء}$ ، $\text{و}_{٣} = \text{ك}_{٣}\,\text{ء}$ ، .... ، $\text{و}_{ن} = \text{ك}_{ن}\,\text{ء}$ حيث : $\text{ك}_{١}$ ، $\text{ك}_{٢}$ ، $\text{ك}_{٣}$ ، .... ، $\text{ك}_{ن}$ هى كتل الجسيمات ، ء مقدار عجلة الجاذبية الأرضية ، بقسمة كل من البسط و المقام على ء نحصل على العلاقة

$$\overrightarrow{\text{ر}}_{م} = \frac{\text{ك}_{١}\overrightarrow{\text{ر}}_{١} + \text{ك}_{٢}\overrightarrow{\text{ر}}_{٢} + \text{ك}_{٣}\overrightarrow{\text{ر}}_{٣} + \dots + \text{ك}_{ن}\overrightarrow{\text{ر}}_{ن}}{\text{ك}_{١} + \text{ك}_{٢} + \text{ك}_{٣} + \dots + \text{ك}_{ن}} \qquad (٢)$$

و يمكن كتابة العلاقات الاتجاهية السابقة بدلالة المركبات فى اتجاهى محورى الاحداثيين المتعامدين و س ، و ص فنحصل على الآتى :

$$س_م = \frac{ك_١ س_١ + ك_٢ س_٢ + ك_٣ س_٣ + ... + ك_ن س_ن}{ك_١ + ك_٢ + ك_٣ + ... + ك_ن} ،$$

$$ص_م = \frac{ك_١ ص_١ + ك_٢ ص_٢ + ك_٣ ص_٣ + ... + ك_ن ص_ن}{ك_١ + ك_٢ + ك_٣ + ... + ك_ن}$$

إجابة تفكير ناقد صفحة ١٠٣

هل يتغير موضع مركز الثقل للنظام فى المثال السابق بتغير مواضع المحاور المتعامدة ؟ فسر اجابتك

الحل

لا يتغير مركز الثقل للنظام بتغير مواضع المحاور المتعامدة

حيث لا يتغير البعد بين موضع مركز الثقل و كل من مواضع الأوزان بتغير مواضع المحاور المتعامدة

فإذا اعتبرنا أن : ٢ نقطة الأصل ، $م_٢$ مركز ثقل النظام بالنسبة لنقطة ٢

ثم اعتبرنا أن : ب نقطة الأصل ، $م_ب$ مركز ثقل النظام بالنسبة لنقطة ب

ثم اعتبرنا أن : حـ نقطة الأصل ، $م_حـ$ مركز ثقل النظام بالنسبة لنقطة حـ نجد :

$٢ م_٢ = ٢ م_ب = ٢ م_حـ$ ، $ب م_٢ = ب م_ب = ب م_حـ$

، $حـ م_٢ = حـ م_ب = حـ م_حـ$

إجابة حاول أن تحل (٢) صفحة ١٠٤

٢ ب حـ مثلث متساوى الأضلاع طول ضلعه ٤ ديسمترات ، النقط ء ، هـ ، و منتصفات أضلاعه ب حـ ، ٢ حـ ، ٢ ب على الترتيب وضعت الأثقال ٥ ، ١ ، ٣ ، ٢ ، ٤ ، ٦ ث كجم عند النقط ٢ ، ب ، حـ ، ء ، هـ ، و على الترتيب أوجد موضع مركز ثقل المجموعة من ب

الحل

نختار اتجاهين متعامدين ب س ، ب ص كما بالشكل المقابل و ذلك باعتبار نقطة ب نقطة الأصل و من هندسة الشكل نجد :

$٢ ء = ٤$ حا $٦٠° = ٢\sqrt{٣}$ ديسم

$هـ ز = ٢$ حا $٦٠° = \sqrt{٣}$ ديسم

$و ع = ٢$ حا $٦٠° = \sqrt{٣}$ ديسم

و نكون جدول الأوزان و احداثياتها كما يلى :

	٢	ب	حـ	ء	هـ	و
و	٥	١	٣	٢	٤	٦
س	٢	٠	٤	٢	٣	١
ص	$٢\sqrt{٣}$	٠	٠	٠	$\sqrt{٣}$	$\sqrt{٣}$

$$\therefore س_م = \frac{٥ \times ٢ + ١ \times ٠ + ٣ \times ٤ + ٢ \times ٢ + ٤ \times ٣ + ٦ \times ١}{٥ + ١ + ٣ + ٢ + ٤ + ٦} = \frac{٤٤}{٢١} \text{ ديسم}$$

$$، ص_م = \frac{٥ \times ٢\sqrt{٣} + ١ \times ٠ + ٣ \times ٠ + ٢ \times ٠ + ٤ \times \sqrt{٣} + ٦ \times \sqrt{٣}}{٥ + ١ + ٣ + ٢ + ٤ + ٦} = \frac{٢٠\sqrt{٣}}{٢١} \text{ ديسم}$$

$\therefore$ احداثى مركز الثقل = $\left(\frac{٤٤}{٢١} ، \frac{٢٠\sqrt{٣}}{٢١} \right)$ بالنسبة للنقطة ب

ملاحظة هامة : التعليق الحر للجسم الجاسئ :

إذا علق جسم جاسئ مقدار وزنه (و) تعليقاً حراً من إحدى نقطه (٢) بواسطة خيط فى نقطة التعليق (ب) حيث (شـ) مقدار قوة شد الخيط

و عندما يتزن الجسم فإن : شـ = و

، ∵ (و) تؤثر رأسياً لأسفل ∴ (شـ) يؤثر رأسياً لأعلى

، خطا عمل (و) ، (شـ) ينطبقان

∴ مركز ثقل الجسم الجاسئ (م) يقع على الخط الرأسى المار بنقطة التعلق

أحمد الشنتورى

مركز ثقل القضبان و الصفائح المنتظمة :

(١) مركز ثقل قضيب منتظم الكثافة يقع عند نقطة منتصفه

(٢) مركز ثقل صفيحة رقيقة منتظمة الكثافة محدودة بمتوازى أضلاع (مستطيل ، معين ، مربع) يقع عند نقطة تقاطع القطرين

(٣) مركز ثقل صفيحة رقيقة منتظمة الكثافة محدودة بمثلث يقع عند نقطة تلاقى متوسطات هذا المثلث

(٤) مركز ثقل صفيحة رقيقة منتظمة الكثافة محدودة بدائرة يقع فى مركز الدائرة

(٥) مركز ثقل صفيحة رقيقة منتظمة الكثافة محدودة بشكل سداسى منتظم يقع عند مركز الشكل السداسى

إجابة حاول أن تحل (٣) صفحة ١٠٥

سلك رفيع منتظم السمك و الكثافة على شكل شبه منحرف أ ب حـ ء فيه : أ ب = ١٥ سم ، ب حـ = ١٢ سم ، حـ ء = ١٠ سم ، ق (∠ أ ب حـ) = ق (∠ ب حـ ء) = ٩٠° ، أوجد بُعد مركز ثقل السلك عن الضلعين $\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{ب حـ}}$

الحل

∵ السلك رفيع منتظم السمك و الكثافة

∴ يمكن اعتباره مكون من ٤ قضبان منتظمة $\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{ب حـ}}$ ، $\overline{\text{حـ ء}}$ ، $\overline{\text{أ ء}}$ حيث من هندسة الشكل

أ ء = ١٣ سم ، ∵ أ ب = ١٥ سم

، ب حـ = ١٢ سم ، حـ ء = ١٠ سم

∴ أ ب : ب حـ : حـ ء : ء أ

= ١٥ : ١٢ : ١٠ : ١٣

، بفرض أن كتل : $\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{ب حـ}}$ ، $\overline{\text{حـ ء}}$ ، $\overline{\text{ء أ}}$ هى على الترتيب :

١٥ ك ، ١٢ ك ، ١٠ ك ، ١٣ ك و كل يؤثر فى منتصف القضيب

و باختيار الاتجاهين المتعامدين $\overleftarrow{\text{ب س}}$ ، $\overleftarrow{\text{ب ص}}$

كما بالشكل و ذلك باعتبار نقطة ب نقطة الأصل

يكون جدول الكتل و احداثياتها كما يلى :

الكتل	١٥ ك	١٢ ك	١٠ ك	١٣ ك
س	٠	٦	١٢	٦
ص	٧,٥	٠	٥	١٢,٥

$$\therefore \text{س}_\text{م} = \frac{\text{١٥ ك} \times ٠ + \text{١٢ ك} \times ٦ + \text{١٠ ك} \times ١٢ + \text{١٣ ك} \times ٦}{\text{١٥ ك} + \text{١٢ ك} + \text{١٠ ك} + \text{١٣ ك}} = ٥,٨ \text{ سم}$$

$$\text{، ص}_\text{م} = \frac{\text{١٥ ك} \times ٧,٥ + \text{١٢ ك} \times ٠ + \text{١٢ ك} \times ٥ + \text{١٣ ك} \times ١٢,٥}{\text{١٥ ك} + \text{١٢ ك} + \text{١٠ ك} + \text{١٣ ك}} = ٦,٧ \text{ سم}$$

∴ احداثى مركز الثقل = (٥,٨ ، ٦,٧) بالنسبة للنقطة ب

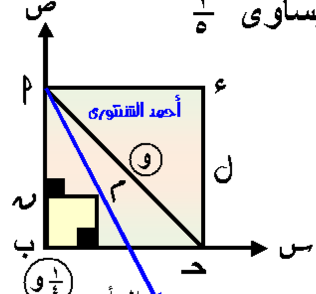
أى أن : بُعد مركز ثقل السلك عن الضلع $\overline{\text{أ ب}}$ = ٥,٨ سم

، عن الضلع $\overline{\text{ب حـ}}$ = ٦,٧ سم

إجابة حاول أن تحل (٤) صفحة ١٠٥

علقت صفيحة مربعة منتظمة وزنها (و) تعليقاً حراً من الرأس أ ، و ثبت عند الرأس ب ثقل وزنه $\frac{1}{4}$ و و أثبت أن ظل زاوية ميل القطر $\overline{\text{أ حـ}}$ على الرأسى فى وضع الاتزان يساوى $\frac{1}{5}$

الحل



بفرض أن : طول ضلع الصفيحة = ل

، ∵ الصفيحة مربعة منتظمة

∴ وزنها يؤثر فى نقطة تلاقى القطرين

و باختيار الاتجاهين المتعامدين $\overleftarrow{\text{ب س}}$ ، $\overleftarrow{\text{ب ص}}$

كما بالشكل و ذلك باعتبار نقطة ب نقطة الأصل

يكون جدول الأوزان و احداثياتها كما يلى :

الوزن	و	$\frac{١}{٤}$ و
س	$\frac{١}{٢}$ ل	٠
ص	$\frac{١}{٢}$ ل	٠

∴ $س_م = \frac{و \times \frac{١}{٢} ل + و \times ٠}{و + \frac{١}{٤} و} = \frac{٢}{٥} ل$

، $ص_م = \frac{و \times \frac{١}{٢} ل + و \times ٠}{و + \frac{١}{٤} و} = \frac{٢}{٥} ل$

∴ احداثى مركز الثقل = ($\frac{٢}{٥}$ ل ، $\frac{٢}{٥}$ ل) بالنسبة للنقطة ب

∴ م ن = $\frac{٢}{٥}$ ل ، أ ن = $\frac{٣}{٥}$ ل　　∴ طا(∠م أ ن) = $\frac{٢}{٣}$

، ∵ ق(∠ب أ حـ) = ٤٥° " خواص المربع "

∴ ق(∠م أ حـ) = ٤٥° − ق(∠م أ ن)

∴ طا(∠م أ حـ) = طا ٤٥° − طا(∠م أ ن)

$= \frac{طا ٤٥° - طا(∠م أ ن)}{١ + طا ٤٥° طا(∠م أ ن)} = \frac{١ - \frac{٢}{٣}}{١ + ١ \times \frac{٢}{٣}} = \frac{١}{٥}$

إجابة تفكير ناقد صفحة ١٠٦

أثبت أن مركز ثقل صفيحة رقيقة على شكل مثلث ينطبق مع مركز ثقل ثلاث كتل متساوية موضوعة عند رؤوس المثلث

الحل

∵ الصفيحة رقيقة منتظمة على شكل مثلث

∴ مركز ثقلها يؤثر فى نقطة تلاقى متوسطات المثلث

، ∵ مركز ثقل الكتلتين (ك) عند ب ، (ك) عند حـ

هو مركز ثقل كتلة مقدارها (٢ ك) و تؤثر عند ء

حيث : ء منتصف $\overline{ب حـ}$

، ∵ مركز ثقل الكتلتين (ك) عند أ ، (٢ ك) عند ء

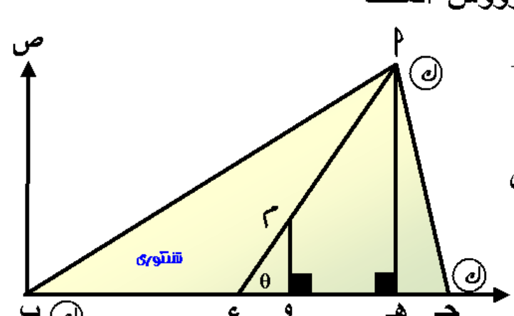
هو مركز ثقل كتلة مقدارها (٣ ك) و تؤثر عند م حيث : م ∈ $\overline{أ ء}$ ،

ك × أ م = ٢ ك × ء م　　∴ أ م = ٢ ء م

∴ م هى نقطة تلاقى متوسطات المثلث أ ب حـ

أى أن : مركز ثقل صفيحة رقيقة على شكل مثلث ينطبق مع مركز ثقل ثلاث كتل متساوية موضوعة عند رؤوس المثلث

حل آخر



باختيار الاتجاهين المتعامدين $\overrightarrow{ب س}$ ، $\overrightarrow{ب ص}$ كما بالشكل المقابل

و ذلك باعتبار نقطة ب نقطة الأصل

من هندسة نجد : ب ء = ء حـ

، ب حـ = ٢ ب ء

، أ هـ = أ ء حا θ

، م و = م ء حا θ

، ء هـ = أ ء حتا θ　، ء و = م ء حتا θ

∴ احداثى م = (م ء حتا θ ، م ء حا θ)　　(١)

يكون جدول الكتل و احداثياتها كما يلى :

	أ	ب	حـ
الكتل	ك	ك	ك
س	ب ء + أ ء حتا θ	٠	٢ ب ء
ص	أ ء حا θ	٠	٠

∴ $س_م = \frac{ك \times ٠ + ك \times (ب ء + أ ء حتا θ) + ك \times (٢ ب ء)}{ك + ك + ك}$

= (ب ء + $\frac{١}{٣}$ أ ء حتا θ) وحدة طول

، $ص_م = \frac{ك \times أ ء حا θ + ك \times ٠ + ك \times ٠}{ك + ك + ك} = \frac{١}{٣}$ أ ء حا θ وحدة طول

∴ احداثى مركز الثقل = (ب ء + $\frac{١}{٣}$ أ ء حتا θ ، $\frac{١}{٣}$ أ ء حا θ)

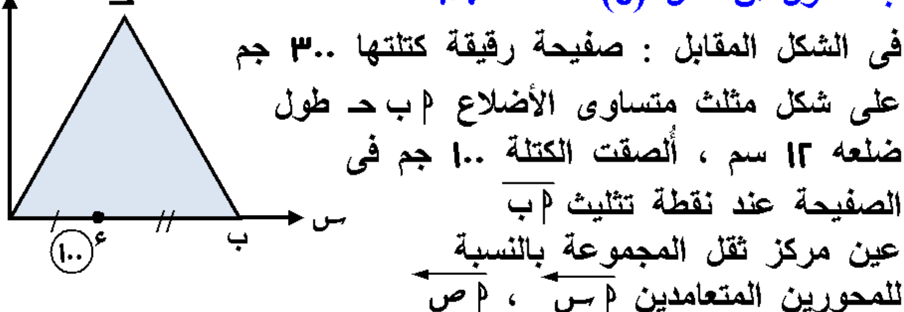
بالنسبة للنقطة ب　　(٢)

من (١) ، (٢) ينتج : $\frac{١}{٣}$ أ ء حا θ = م ء حا θ

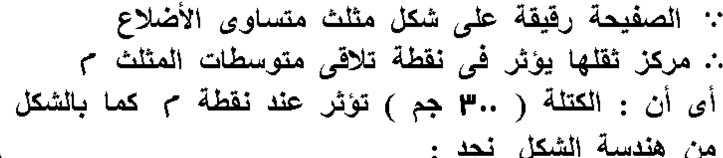
∴ أ ء = ٣ م ء　　∴ م هى نقطة تلاقى متوسطات المثلث أ ب حـ

إجابة حاول أن تحل (٥) صفحة ١٠٧

فى الشكل المقابل : صفيحة رقيقة كتلتها ٣٠٠ جم على شكل مثلث متساوى الأضلاع أ ب حـ طول ضلعه ١٢ سم ، أُلصقت الكتلة ١٠٠ جم فى الصفيحة عند نقطة تثليث $\overline{\text{أ ب}}$ عين مركز ثقل المجموعة بالنسبة للمحورين المتعامدين $\overleftarrow{\text{أ س}}$ ، $\overleftarrow{\text{أ ص}}$



الحل



∵ الصفيحة رقيقة على شكل مثلث متساوى الأضلاع

∴ مركز ثقلها يؤثر فى نقطة تلاقى متوسطات المثلث م

أى أن : الكتلة (٣٠٠ جم) تؤثر عند نقطة م كما بالشكل

من هندسة الشكل نجد :

حـ هـ = ١٢ حا ٦٠° = $٦\sqrt{٣}$ سم

أ (٠ ، ٠) ، ب (١٢ ، ٠) ، حـ (٦ ، $٦\sqrt{٣}$) فيكون :

$\text{م} = \left(\frac{١}{٣} \times (٠ + ١٢ + ٦) ، \frac{١}{٣} \times (٠ + ٠ + ٦\sqrt{٣}) \right)$

$= (٦ ، ٢\sqrt{٣})$

و يكون جدول الكتل و احداثياتها كما فى الجدول المقابل :

	م	ء
ك	٣٠٠	١٠٠
س	٦	٤
ص	$٢\sqrt{٣}$	٠

$∴ \text{س}_\text{م} = \frac{٣٠٠ \times ٦ + ١٠٠ \times ٤}{٣٠٠ + ١٠٠} = ٥,٥$ سم

$، \text{ص}_\text{م} = \frac{٣٠٠ \times ٢\sqrt{٣} + ١٠٠ \times ٠}{٣٠٠ + ١٠٠} = ١,٥\sqrt{٣}$ سم

∴ احداثى مركز الثقل = (٥,٥ ، $١,٥\sqrt{٣}$)

بالنسبة للمحورين المتعامدين $\overleftarrow{\text{أ س}}$ ، $\overleftarrow{\text{أ ص}}$

حل آخر

من الشكل تكون نقطة أ نقطة الأصل ، بتوزيع كتلة الصفيحة ٣٠٠ جم عند الرؤوس أ ، ب ، حـ إلى ثلاث كتل متساوية كتلة كل منها ١٠٠ جم

من هندسة الشكل نجد : حـ هـ = ١٢ حا ٦٠° = $٦\sqrt{٣}$ سم

و يكون جدول الكتل و احداثياتها كما يلى :

	أ	ب	حـ	ء
ك	١٠٠	١٠٠	١٠٠	١٠٠
س	٠	١٢	٦	٤
ص	٠	٠	$٦\sqrt{٣}$	٠

$∴ \text{س}_\text{م} = \frac{١٠٠ \times ٠ + ١٠٠ \times ١٢ + ١٠٠ \times ٦ + ١٠٠ \times ٤}{١٠٠ + ١٠٠ + ١٠٠ + ١٠٠} = ٥,٥$ سم

$، \text{ص}_\text{م} = \frac{١٠٠ \times ٠ + ١٠٠ \times ٠ + ١٠٠ \times ٦\sqrt{٣}}{١٠٠ + ١٠٠ + ١٠٠ + ١٠٠} = ١,٥\sqrt{٣}$ سم

∴ احداثى مركز الثقل = (٥,٥ ، $١,٥\sqrt{٣}$)

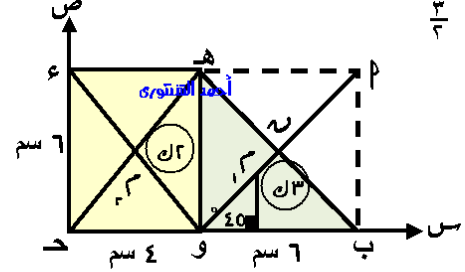
بالنسبة للمحورين المتعامدين $\overleftarrow{\text{أ س}}$ ، $\overleftarrow{\text{أ ص}}$

إجابة حاول أن تحل (٦) صفحة ١٠٩

صفيحة رقيقة منتظمة الكثافة على شكل مستطيل أ ب حـ ء فيه : أ ب = ٦ سم ، ب حـ = ١٠ سم ، هـ $\in \overline{\text{أ ء}}$ بحيث : أ هـ = ٦ سم

ثنى المثلث أ ب هـ حول الضلع $\overline{\text{ب هـ}}$ حتى أنطبق $\overline{\text{أ ب}}$ على $\overline{\text{ب حـ}}$ تماماً عين موضع مركز ثقل الصفيحة بالنسبة إلى $\overleftarrow{\text{حـ ب}}$ ، $\overleftarrow{\text{حـ ء}}$

الحل



∵ $\frac{\text{مساحة المربع ٲ ب و هـ}}{\text{مساحة المستطيل و حـ ء هـ}} = \frac{٣٦}{٢٤} = \frac{٣}{٢}$

، ∵ الصفيحة رقيقة منتظمة الكثافة

∴ المساحات تتناسب مع الكتل

بفرض أن كتلة المربع ٲ ب و هـ = ٣ ك

∴ كتلة المستطيل و حـ ء هـ = ٢ ك

، ∵ الاتجاهين $\overleftarrow{\text{حـ ب}}$ ، $\overleftarrow{\text{حـ ء}}$ متعامدين

∴ كتلة المستطيل و حـ ء هـ تؤثر عند نقطة تلاقى قطريه $م_٢$ (٢ ، ٣)

، كتلة المربع ٲ ب و هـ فى الوضع الجديد تؤثر عند تلاقى متوسطات △ و ب هـ

، من هندسة الشكل نجد : و ن = $\frac{١}{٢}$ ٲ و = $\frac{١}{٢}$ × ٦ $\sqrt{٢}$

∴ و$م_١$ = $\frac{٢}{٣}$ و ن = $\frac{٢}{٣}$ × $\frac{١}{٢}$ × ٦ $\sqrt{٢}$ = ٢ $\sqrt{٢}$

∴ $م_١$ = (٢ $\sqrt{٢}$ × حتا ٤٥° + ٤ ، ٢ $\sqrt{٢}$ × حا ٤٥°) = (٦ ، ٢)

و يكون جدول الكتل و الاحداثيات كما يلى :

الكتل	٣ ك	٢ ك
س	٦	٢
ص	٢	٣

∴ $س_م = \frac{٣ ك × ٦ + ٢ ك × ٢}{٣ ك + ٢ ك}$ = ٤,٤ سم

، $ص_م = \frac{٣ ك × ٢ + ٢ ك × ٣}{٣ ك + ٢ ك}$ = ٢,٤ سم

∴ موضع مركز الثقل هو = (٤,٤ ، ٢,٤) بالنسبة لنقطة حـ

حل تمارين (٦ – ١) صفحة ١٠٩ بالكتاب المدرسى

أولاً : ضع علامة (✓) أو علامة (×) لكل عبارة مما يأتى :

(١) مركز ثقل الجسم الجاسئ يكون ثابتاً و لا يقع بالضرورة على أحد جسيمات هذا الجسم

(٢) إذا عُلقت صفيحة غير منتظمة و محدودة بمثلث من أحد رؤوسها تعليقاً حراً فإن الخط الرأسى المار بنقطة التعليق يمر بنقطة تلاقى المستقيمات المتوسطة للمثلث

(٣) إذا وُضعت ثلاث كتل متساوية عند منتصفات أضلاع مثلث متساوى الأضلاع فإن مركز ثقلها يقع عند نقطة تقاطع متوسطات المثلث

(٤) مركز ثقل صفيحة رقيقة منتظمة محدودة بمثلث ينطبق مع مركز ثقل ثلاث كتل متساوية موضوعة عند رؤوس هذا المثلث

(٥) مركز ثقل صفيحة رقيقة منتظمة محدودة بشكل متوازى أضلاع يقع عند نقطة تقاطع قطريه

(٦) إذا وُضعت أربع كتل متساوية عند رؤوس شبه منحرف متساوى الساقين فإن مركز ثقل المجموعة يؤثر عند نقطة تلاقى قطريه

(٧) إذا عُلق جسم جاسئ تعليقاً حراً فإن الخط المستقيم المار بمركز ثقل الجسم يمر بنقطة التعليق

(٨) مركز ثقل نقطتين ماديتين تفصل بينهما مسافة ثابتة يقع على القطعة المستقيمة المرسومة بينهما و يقسم طولها بنسبة تساوى النسبة بين كتلتيهما

(٩) إذا عُلقت صفيحة منتظمة السمك و الكثافة و محدودة بمثلث متساوى الأضلاع من أحد رؤوسها تعليقاً حراً كان الضلع المقابل لهذا الرأس أفقياً

(١٠) إذا وُضعت أربع كتل متساوية عند رؤوس متوازى أضلاع فإن مركز ثقل المجموعة يؤثر عند نقطة تلاقى قطرى متوازى الأضلاع

الحل

(١) مركز ثقل الجسم الجاسئ يكون ثابتاً و لا يقع بالضرورة على أحد جسيمات هذا الجسم (✓)

(٢) إذا عُلقت صفيحة غير منتظمة و محدودة بمثلث من أحد رؤوسها تعليقاً حراً فإن الخط الرأسى المار بنقطة التعليق يمر بنقطة تلاقى المستقيمات المتوسطة للمثلث (×)

(٣) إذا وُضعت ثلاث كتل متساوية عند منتصفات أضلاع مثلث متساوى الأضلاع فإن مركز ثقلها يقع عند نقطة تقاطع متوسطات المثلث (✓)

(٤) مركز ثقل صفيحة رقيقة منتظمة محدودة بمثلث ينطبق مع مركز ثقل ثلاث كتل متساوية موضوعة عند رؤوس هذا المثلث (✓)

(٥) مركز ثقل صفيحة رقيقة منتظمة محدودة بشكل متوازى أضلاع يقع عند نقطة تقاطع قطريه (✓)

(٦) إذا وُضعت أربع كتل متساوية عند رؤوس شبه منحرف متساوى الساقين فإن مركز ثقل المجموعة يؤثر عند نقطة تلاقى قطريه (×)

(٧) إذا عُلق جسم جاسئ تعليقاً حراً فإن الخط المستقيم المار بمركز ثقل الجسم يمر بنقطة التعليق (✓)

(٨) مركز ثقل نقطتين ماديتين تفصل بينهما مسافة ثابتة يقع على القطعة المستقيمة المرسومة بينهما و يقسم طولها بنسبة تساوى النسبة بين كتلتيهما (×)
التصحيح : يقسم طولها بنسبة عكسية لنسبة كتليهما

(٩) إذا عُلقت صفيحة منتظمة السمك و الكثافة و محدودة بمثلث متساوى الأضلاع من أحد رؤوسها تعليقاً حراً كان الضلع المقابل لهذا الرأس أفقياً (✓)

(١٠) إذا وُضعت أربع كتل متساوية عند رؤوس متوازى أضلاع فإن مركز ثقل المجموعة يؤثر عند نقطة تلاقى قطرى متوازى الأضلاع (✓)

ثانياً : أجب عن الأسئلة الآتية :

(١١) أوجد مركز ثقل جسمين ماديين كتلة كل منهما ٤ نيوتن ، ٦ نيوتن و المسافة بينهما ٥ متر

الحل

٦ نيوتن ـــ ٥ متر ـــ ٤ نيوتن
$س_٢ = ٥$ ، $س_١ = ٠$

باعتبار أن الخط الواصل بين الجسيمين يقع على محور السينات و أن نقطة الأصل تقع عند الجسيم ٤ نيوتن فيكون : $س_١ = ٠$ ، $س_٢ = ٥$ ، $ك_١ = ٤$ ، $ك_٢ = ٦$

$$\therefore س_م = \frac{٤ \times ٠ + ٦ \times ٥}{٤ + ٦} = ٣$$

أى أن : مركز ثقل الجسيمين الماديين يقع على بعد ٣ متر من الجسم ٤ نيوتن

(١٢) أين يقع مركز ثقل نظام مؤلف من ثلاث كتل موزعة على النحو التالى : $ك_١ = ١$ كجم عند الموضع $م_١ (٠ ، ٠)$ ، $ك_٢ = ١$ كجم عند الموضع $م_٢ (٣ ، ٠)$ ، $ك_٣ = ٢$ كجم عند الموضع $م_٣ (٣ ، ٤)$

الحل

$$س_م = \frac{١ \times ٠ + ١ \times ٣ + ٢ \times ٣}{١ + ١ + ٢} = \frac{٩}{٤}$$

$$، ص_م = \frac{١ \times ٠ + ١ \times ٠ + ٢ \times ٤}{١ + ١ + ٢} = ٢$$

$\therefore$ موضع مركز الثقل هو $= (\frac{٩}{٤} ، ٢)$

(١٣) أوجد موقع مركز ثقل التوزيع الآتى :
$و_١ = ٣$ نيوتن عند $(٤ ، -١)$ ، $و_٢ = ٥$ نيوتن عند $(٠ ، ٣)$
$و_٣ = ٤$ نيوتن عند $(-٢ ، ٣)$

الحل

أحمد الشتورى

$$س_م = \frac{٣ \times ٤ + ٥ \times ٠ + ٤ \times (-٢)}{٣ + ٥ + ٤} = \frac{١}{٣}$$

$$، ص_م = \frac{٣ \times (-١) + ٥ \times ٣ + ٤ \times ٣}{٣ + ٤ + ٥} = ٢$$

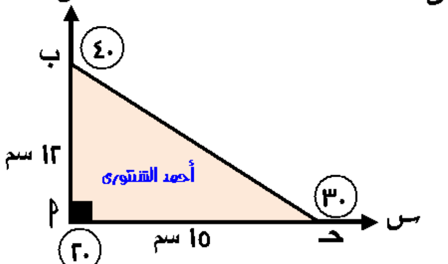
∴ موضع مركز الثقل هو = $(\frac{١}{٣} ، ٢)$

(١٤) عين مركز ثقل كل من المجموعات الآتية حسب البيانات المعطاة في الجدول :

الموضع	عند أ	عند ب	عند حـ
الكتلة	٢٠ جم	٤٠ جم	٣٠ جم

الحل

نختار اتجاهين متعامدين $\overleftarrow{أحـ}$ ، $\overleftarrow{أب}$ ذلك باعتبار نقطة أ نقطة الأصل و نكون جدول الأوزان و احداثياتها كما يلي :



	أ	ب	حـ
الكتلة	٢٠	٤٠	٣٠
س	٠	٠	١٥
ص	٠	١٢	٠

$$∴ س_م = \frac{٢٠ \times ٠ + ٤٠ \times ٠ + ٣٠ \times ١٢}{٢٠ + ٤٠ + ٣٠} = ٥ \text{ سم}$$

$$، ص_م = \frac{٢٠ \times ٠ + ٤٠ \times ١٢ + ٣٠ \times ٠}{٢٠ + ٤٠ + ٣٠} = \frac{١٦}{٣} \text{ سم}$$

∴ احداثى مركز الثقل = $(٥ ، \frac{١٦}{٣})$ بالنسبة للنقطة أ

الموضع	عند أ	عند ب	عند حـ	عند ء
الكتلة	ك	ك	ك	ك

الحل

نختار اتجاهين متعامدين $\overleftarrow{أب}$ ، العمودى عليه و ذلك باعتبار نقطة أ نقطة الأصل و نكون جدول الأوزان و احداثياتها كما يلي :

	أ	ب	حـ	ء
الكتلة	ك	ك	ك	ك
س	٠	٦٠	٦٠	٨٠
ص	٠	٠	−٢٠	−٢٠

$$∴ س_م = \frac{ك \times ٠ + ك \times ٦٠ + ك \times ٦٠ + ك \times ٨٠}{ك + ك + ك + ك} = ٥٠ \text{ سم}$$

$$، ص_م = \frac{ك \times ٠ + ك \times ٠ + ك \times (-٢٠) + ك \times (-٢٠)}{ك + ك + ك + ك} = -١٠ \text{ سم}$$

∴ احداثى مركز الثقل = $(٥٠ ، -١٠)$ بالنسبة للنقطة أ

الموضع	عند أ	عند ب	عند حـ
الكتلة	٤ جم	٥ جم	٣ جم

الحل

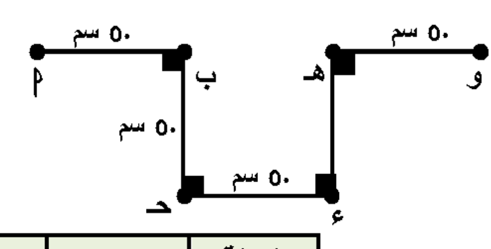
نختار اتجاهين متعامدين $\overrightarrow{\text{أس}}$ ، $\overrightarrow{\text{أص}}$
كما بالشكل المقابل و ذلك باعتبار نقطة أ نقطة الأصل
و من هندسة الشكل نجد :
$\text{أ ء} = 12 \,\text{حا}\, 60^\circ = 6\sqrt{3}$ سم
و نكون جدول الكتل و احداثياتها كما يلى :

	أ	ب	حـ
الكتلة	٤	٥	٣
س	٠	١٢	٦
ص	٠	٠	$6\sqrt{3}$

$\therefore$ $س_م = \dfrac{4\times 0 + 5\times 12 + 3\times 6}{4+5+3} = \dfrac{13}{2}$ سم

، $ص_م = \dfrac{5\times 0 + 4\times 0 + 3\times 2\sqrt{3}}{4+5+3} = \dfrac{3}{2}\sqrt{3}$ سم

$\therefore$ احداثى مركز الثقل = $\left(\dfrac{13}{2} \text{ ، } \dfrac{3}{2}\sqrt{3}\right)$ بالنسبة للنقطة أ



الكتلة	٨ ث جم	٣ ث جم	٢ ث جم	٢ ث جم
الموضع	عند أ	عند حـ	عند هـ	عند و

الحل

نختار اتجاهين متعامدين
$\overrightarrow{\text{أس}}$ ، $\overrightarrow{\text{أص}}$
كما بالشكل المقابل
و ذلك باعتبار نقطة أ نقطة الأصل
و نكون جدول الكتل و احداثياتها كما يلى :

	أ	حـ	هـ	و
الكتلة	٨	٣	٢	٢
س	٠	٥٠	١٠٠	١٥٠
ص	٠	٥٠ −	٠	٠

$\therefore$ $س_م = \dfrac{8\times 0 + 3\times 50 + 2\times 100 + 2\times 150}{8+3+2+2} = \dfrac{130}{3}$ سم

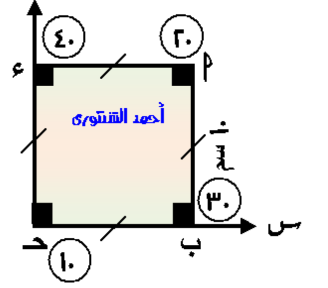
، $ص_م = \dfrac{8\times 0 + 3\times(-50) + 2\times 0 + 2\times 0}{8+3+2+2} = -10$ سم

$\therefore$ احداثى مركز الثقل = $\left(\dfrac{130}{3} \text{ ، } -10\right)$ بالنسبة للنقطة أ

الكتلة	٢٠ جم	٣٠ جم	١٠ جم	٤٠ جم
الموضع	عند أ	عند ب	عند حـ	عند ء

الحل

كما بالشكل المقابل : نقطة حـ نقطة الأصل
و نكون جدول الأوزان و احداثياتها كما يلى :

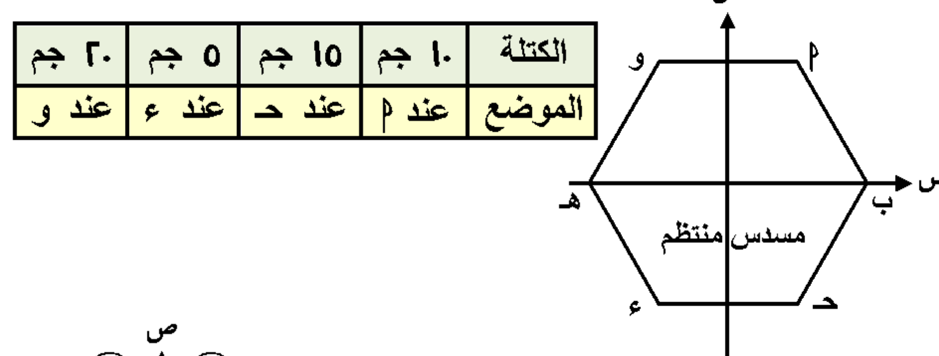


	أ	ب	حـ	ء
الوزن	٢٠	٣٠	١٠	٤٠
س	١٠	١٠	٠	٠
ص	١٠	٠	٠	١٠

$\therefore$ $س_م = \dfrac{20\times 10 + 30\times 10 + 10\times 0 + 40\times 0}{20+30+10+40} = 5$ سم

، $\text{ص}_\text{م} = \frac{٢٠ \times ١٠ + ٣٠ \times ٠ + ١٠ \times ٠ + ٤٠ \times ١٠}{٢٠ + ٣٠ + ١٠ + ٤٠} = ٦$ سم

∴ احداثى مركز الثقل = (٥ ، ٦) بالنسبة للنقطة حـ



الكتلة	١٠ جم	١٥ جم	٥ جم	٢٠ جم
الموضع	عند أ	عند حـ	عند ء	عند و

الحل

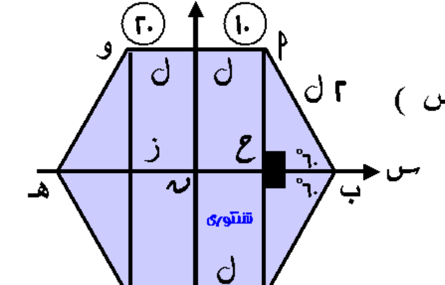
كما بالشكل المقابل : نقطة م (مركز المسدس) نقطة الأصل ، بفرض أن :

طول ضلع المسدس = ٢ ل وحدة طول

من هندسة الشكل :

$\text{أ ع} = ٢ \text{ ل حا } ٦٠^\circ = \text{ل} \sqrt{٣}$ وحدة طول

بالمثل : $\text{حـ ع} = \text{و ز} = \text{ء ز} = \text{ل}\sqrt{٣}$ وحدة طول



و نكون جدول الأوزان و احداثياتها كما يلى :

	أ	حـ	ء	و
الكتلة	١٠	١٥	٥	٢٠
س	ل	ل	− ل	− ل
ص	ل $\sqrt{٣}$	− ل $\sqrt{٣}$	− ل $\sqrt{٣}$	ل $\sqrt{٣}$

∴ $\text{س}_\text{م} = \frac{١٠ \times \text{ل} + ١٥ \times \text{ل} + ٥ \times (-\text{ل}) + ٢٠ \times (-\text{ل})}{١٠ + ١٥ + ٥ + ٢٠} = \text{صفر}$

، $\text{ص}_\text{م} = \frac{١٠ \times \text{ل}\sqrt{٣} + ١٥ \times (-\text{ل}\sqrt{٣}) + ٥ \times (-\text{ل}\sqrt{٣}) + ٢٠ \times \text{ل}\sqrt{٣}}{١٠ + ١٥ + ٥ + ٢٠}$

$= \frac{١}{٥} \text{ل} \sqrt{٣}$ وحدة طول

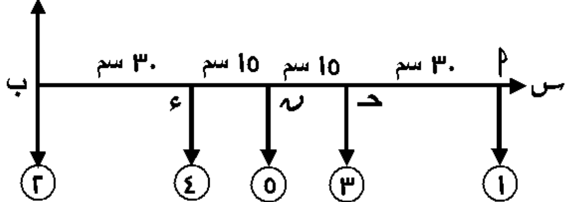
∴ احداثى مركز الثقل = (٠ ، $\frac{١}{٥}\text{ل}\sqrt{٣}$) بالنسبة للنقطة م

ثالثاً : أجب عن الأسئلة الآتية :

(١٥) قضيب منتظم طوله ٩٠ سم و كتلته ٥ كجم ، حـ ، ء نقطتا تثليثه من ناحية أ ، وُضعت كتل مقاديرها ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ كجم عند النقط أ ، ب ، حـ ، ء على الترتيب ، عين مركز ثقل المجموعة عن الطرف أ

الحل

باختيار الاتجاهين المتعامدين $\overrightarrow{\text{ب س}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب ص}}$ كما بالشكل المقابل و ذلك باعتبار نقطة ب نقطة الأصل



و نكون جدول الأوزان و احداثياتها كما يلى :

	أ	ب	حـ	ء	م
الكتلة	١	٢	٣	٤	٥
س	٩٠	٠	٦٠	٣٠	٤٥

∴ $\text{س}_\text{م} = \frac{١ \times ٩٠ + ٢ \times ٠ + ٣ \times ٦٠ + ٤ \times ٣٠ + ٥ \times ٤٥}{١ + ٢ + ٣ + ٤ + ٥} = ٤١$ سم

أى أن : مركز ثقل القضيب يبعد عن ب مسافة : ٤١ سم ، عن أ مسافة : ٤٩ سم

(١٦) أ ب قضيب غير منتظم طوله ٣٠ سم و وزنه ٥٠٠ ث جم ، ثُبت ثقلان مقدارهما ١٠٠ ث جم ، ٢٠٠ ث جم عند الطرفين أ ، ب على الترتيب فأصبح مركز ثقل المجموعة فى نقطة منتصف القضيب عين

موضع مركز ثقل القضيب بالنسبة للطرف أ

الحل

باختيار الاتجاهين المتعامدين $\overleftarrow{\text{أ س}}$ ، $\overleftarrow{\text{أ ص}}$

كما بالشكل المقابل و ذلك باعتبار نقطة أ نقطة الأصل ، حـ نقطة تأثير وزن القضيب ، تبعد عن الطرف أ مسافة : ل سم

و نكون جدول الأوزان و احداثياتها كما يلى :

	أ	ب	حـ
الكتلة	١٠٠	٢٠٠	٥٠٠
س	٠	٣٠	ل

$$\therefore \text{س}_م = \frac{١٠٠ \times ٠ + ٢٠٠ \times ٣٠ + ٥٠٠ \times \text{ل}}{١٠٠ + ٢٠٠ + ٥٠٠}$$

$$= \frac{١}{٨} (٦٠ + ٥ \text{ ل})$$

، $\because \text{س}_م = ١٥$ سم $\therefore \frac{١}{٨} (٦٠ + ٥ \text{ ل}) = ١٥$

و منها : ل = ١٢ سم أى أن : مركز ثقل القضيب يبعد عن أ مسافة : ١٢ سم

(١٧) أ ب حـ صفيحة على شكل مثلث متساوى الأضلاع كتلتها ٣ كجم ، م مركز ثقلها ، وُضعت كتل مقاديرها ٢ ، ٢ ، ١١ كجم عند الرؤوس أ ، ب ، حـ على الترتيب ، برهن أن مركز ثقل المجموعة يقع عند نقطة منتصف $\overline{\text{م حـ}}$

الحل

نختار اتجاهين متعامدين $\overleftarrow{\text{حـ س}}$ ، $\overleftarrow{\text{حـ ص}}$

كما بالشكل المقابل و ذلك باعتبار نقطة حـ نقطة الأصل

، بفرض أن : طول ضلع الصفيحة = ٤ ل وحدة طول

$\therefore$ أ ء = ٤ ل حا ٦٠° = ٢ $\sqrt{٣}$ ل وحدة طول

، م ء = $\frac{١}{٣}$ أ ء = $\frac{٢}{٣} \sqrt{٣}$ ل وحدة طول

، هـ و = $\frac{١}{٢}$ م ء = $\frac{١}{٣} \sqrt{٣}$ ل وحدة طول

و نكون جدول الكتل و احداثياتها كما يلى :

	أ	ب	حـ	م
الكتلة	٢	٢	١١	٣
س	٢ ل	٤ ل	٠	٢ ل
ص	٢ $\sqrt{٣}$ ل	٠	٠	$\frac{٢}{٣} \sqrt{٣}$ ل

$$\therefore \text{س}_م = \frac{٢ \times ٢\text{ل} + ٢ \times ٤\text{ل} + ١١ \times ٠ + ٣ \times ٢\text{ل}}{٢ + ٢ + ١١ + ٣} = \text{ل} \text{ سم}$$

$$، \text{ص}_م = \frac{٢ \times ٢\sqrt{٣}\text{ل} + ٢ \times ٠ + ١١ \times ٠ + ٣ \times \frac{٢}{٣}\sqrt{٣}\text{ل}}{٢ + ٢ + ١١ + ٣} = \frac{١}{٣}\sqrt{٣}\text{ ل سم}$$

$\therefore$ احداثى مركز ثقل المجموعة = (ل ، $\frac{١}{٣} \sqrt{٣}$ ل) بالنسبة للنقطة حـ

، $\because$ احداثى نقطة هـ = (ل ، $\frac{١}{٣} \sqrt{٣}$ ل)

$\therefore$ احداثى مركز ثقل المجموعة يقع عند نقطة منتصف $\overline{\text{م حـ}}$

حل آخر

بتوزيع كتلة الصفيحة (٣ كجم) على رؤوس الصفيحة و اختيار الاتجاهين المتعامدين و ايجاد الأطوال كما فى الحل السابق يصبح جدول الكتل و احداثياتها كما يلى :

	أ	ب	حـ
الكتلة	٣	٣	١٢
س	٢ ل	٤ ل	٠
ص	٢ $\sqrt{٣}$ ل	٠	٠

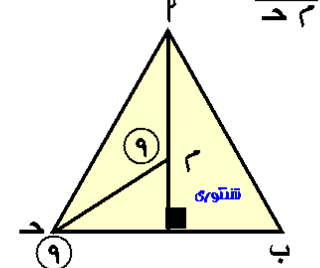
$$\therefore \text{س}_م = \frac{٣ \times ٢\text{ل} + ٣ \times ٤\text{ل} + ١١ \times ٠}{٢ + ٢ + ١١ + ٣} = \text{ل} \text{ سم}$$

$$، \text{ص}_م = \frac{٣ \times ٢\sqrt{٣}\text{ل} + ٢ \times ٠ + ١١ \times ٠}{٢ + ٢ + ١١ + ٣} = \frac{١}{٣}\sqrt{٣}\text{ ل سم}$$

$\therefore$ احداثى مركز ثقل المجموعة = (ل ، $\frac{١}{٣} \sqrt{٣}$ ل) بالنسبة للنقطة حـ

، ∵ احداثى نقطة هـ = (ل ، $\frac{١}{٣}\sqrt{٣}$ ل)

∴ احداثى مركز ثقل المجموعة يقع عند نقطة منتصف $\overline{\text{م حـ}}$

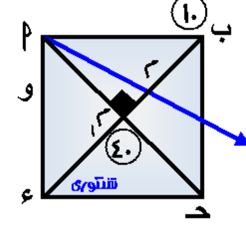


حل ثالث

بتجميع الكتل الثلاث (٢ كجم) عند رؤوس الصفيحة إلى مركز ثقل الصفيحة فيصبح (٩ كجم) عند م ، (٩ كجم) عند حـ

فيكون : مركز ثقل المجموعة عند منتصف $\overline{\text{م حـ}}$

(١٨) عَلقت صفيحة مربعة الشكل منتظمة الكثافة وزنها ٤٠ ث كجم تعليقاً حراً من الرأس أ مركز ثقلها ، ثُبت عند الرأس ب ثقل قدره ١٠ ث كجم ، أوجد قياس زاوية ميل القطر $\overline{\text{أ حـ}}$ على الرأسى فى وضع الاتزان



الحل

بفرض أن : م١ مركز ثقل الصفيحة و هو يؤثر عند عند تلاقى قطريها

، م مركز ثقل المجموعة الكونة من وزن الصفيحة و الثقل (١٠ ث كجم) عند ب

عند وضع الاتزان تكون نقطة م واقعة على الخط الرأسى المار بنقطة أ

، م ∈ $\overline{\text{م١ ب}}$ كما بالشكل بحيث : ١٠ × م ب = ٤٠ × م م١

∴ م م١ = $\frac{١}{٤}$ م ب ∴ م م١ = $\frac{١}{٥}$ م١ ب

، ∵ م١ ب = م١ أ ∴ م م١ = $\frac{١}{٥}$ م١ أ

، من المثلث أ م م١ فإن : طا (∠م١ أ م) = $\frac{١}{٥}$

∴ قياس زاوية ميل القطر $\overline{\text{أ حـ}}$ على الرأسى = طا$^{-١}$ ($\frac{١}{٥}$) = ١١° ١٩′

حل آخر

نختار اتجاهين متعامدين $\overrightarrow{\text{ء س}}$ ، $\overrightarrow{\text{ء ص}}$ كما بالشكل المقابل و ذلك باعتبار نقطة ء نقطة الأصل

، بفرض أن : طول ضلع الصفيحة = ٢ ل وحدة طول

و نكون جدول الكتل و احداثياتها كما يلى :

	م١	ب
الكتلة	٤٠	١٠
س	ل	٢ ل
ص	ل	٢ ل

∴ س$_{م}$ = $\frac{٤٠ \times ل + ١٠ \times ٢ ل}{٤٠ + ١٠}$ = $\frac{٦}{٥}$ ل وحدة طول

، ص$_{م}$ = $\frac{٤٠ \times ل + ١٠ \times ٢ ل}{٤٠ + ١٠}$ = $\frac{٦}{٥}$ ل وحدة طول

∴ احداثى مركز ثقل المجموعة (م) = ($\frac{٦}{٥}$ ل ، $\frac{٦}{٥}$ ل) بالنسبة للنقطة ء

∴ أ و = ٢ ل − $\frac{٦}{٥}$ ل = $\frac{٤}{٥}$ ل ، م و = $\frac{٦}{٥}$ ل

∴ طا (∠م أ و) = $\frac{٣}{٢}$ ∴ ق (∠م أ و) = ٥٦° ١٩′

∴ ق (∠م أ حـ) = ق (∠م أ و) − ق (∠حـ أ و)

= ٥٦° ١٩′ − ٤٥° = ١١° ١٩′

∴ قياس زاوية ميل القطر $\overline{\text{أ حـ}}$ على الرأسى = ١١° ١٩′

(١٩) فى الشكل المقابل : أ ب سلك رفيع منتظم الكثافة ثُنى عند ب ، حـ ، أوجد بُعد مركز الثقل عن كل من $\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{ب حـ}}$ ثم أوجد فى وضع الاتزان قياس زاوية ميل $\overline{\text{أ ب}}$ على الرأسى إذا علق السلك من أ تعليقاً حراً

الحل

∵ السلك رفيع منتظم السمك و الكثافة

∴ يمكن اعتباره مكون من ٣ قضبان منتظمة $\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{ب حـ}}$ ، $\overline{\text{حـ ء}}$

، ∵ أ ب = ١٢ سم ، ب حـ = ١٢ سم ، حـ ء = ٦ سم

∴ أ ب : ب حـ : حـ ء = ٢ : ٢ : ١

، ∵ الكتل تتناسب مع الأطوال

∴ بفرض أن كتل : $\overline{أب}$ ، $\overline{ب حـ}$ ، $\overline{حـ ء}$

هى على الترتيب : ٢ ك ، ٢ ك ، ك

، و كل يؤثر فى منتصف القضيب

و باختيار الاتجاهين المتعامدين $\overrightarrow{ب أ}$ ، $\overrightarrow{ب حـ}$ كما بالشكل و ذلك باعتبار نقطة ب نقطة الأصل

يكون جدول الكتل و احداثياتها كما يلى :

الكتل	٢ ك	٢ ك	ك
س	٠	٦	١٢
ص	٦	٠	٣

∴ $س_م = \frac{٢ك × ٠ + ٢ك × ٦ + ك × ١٢}{٢ك + ٢ك + ك} = ٤,٨$ سم

، $ص_م = \frac{٢ك × ٦ + ٢ك × ٠ + ك × ٣}{٢ك + ٢ك + ك} = ٣$ سم

∴ احداثى مركز الثقل = (٤,٨ ، ٣) بالنسبة للنقطة ب

أى أن : بُعد مركز ثقل السلك عن الضلع $\overline{أب}$ = ٤,٨ سم

، عن الضلع $\overline{ب حـ}$ = ٣ سم

عند التعليق من أ يكون : أ هـ = ١٢ − ٣ = ٩ سم

، م هـ = ٤,٨ سم

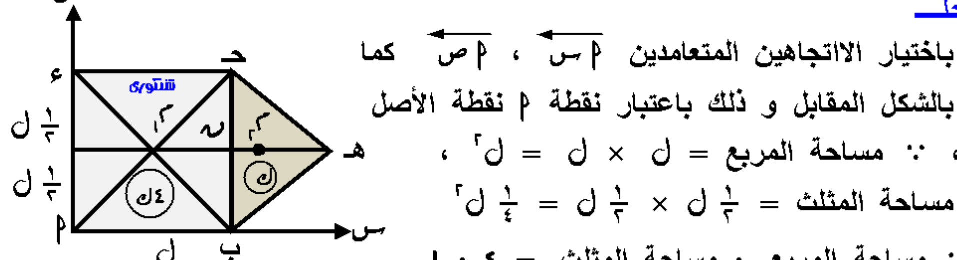
∴ ظا (∠ م أ هـ) = $\frac{٤٨}{٩٠}$

∴ ق (∠ م أ هـ) = ٢٨° ٤′

∴ قياس زاوية ميل $\overline{أب}$ على الرأسى = ٢٨° ٤′

(٢٠) أ ب حـ ء مربع طول ضلعه ل ، رُسم على $\overline{ب حـ}$ مثلث متساوى الساقين ب حـ هـ بحيث يقع الرأس هـ خارج المربع ، أوجد مركز ثقل الصفيحة منتظمة السمك و الكثافة المحدودة بالشكل الناتج ، علماً بأن طول ضلع المربع يساوى ضعف طول ارتفاع المثلث

الحل



باختيار الاتجاهين المتعامدين $\overrightarrow{أ س}$ ، $\overrightarrow{أ ص}$ كما بالشكل المقابل و ذلك باعتبار نقطة أ نقطة الأصل

، ∵ مساحة المربع = ل × ل = $ل^٢$ ،

مساحة المثلث = $\frac{١}{٢}$ ل × $\frac{١}{٢}$ ل = $\frac{١}{٤}$ $ل^٢$

∴ مساحة المربع : مساحة المثلث = ٤ : ١

، ∵ الصفيحة رقيقة منتظمة الكثافة ∴ المساحات تتناسب مع الكتل

بفرض أن كتلة المربع = ٤ ك ∴ كتلة المثلث = ك

حيث : كتلة المربع تؤثر عند نقطة تلاقى قطريه $م_١$ ($\frac{١}{٢}$ ل ، $\frac{١}{٢}$ ل)

، كتلة المثلث تؤثر عند تلاقى متوسطاته $م_٢$ ($\frac{٧}{٦}$ ل ، $\frac{١}{٢}$ ل)

حيث : $م_٢$ ن = $\frac{١}{٣}$ ن هـ = $\frac{١}{٣}$ × $\frac{١}{٢}$ ل = $\frac{١}{٦}$ ل

∴ أ $م_٢$ = ل + $\frac{١}{٦}$ ل = $\frac{٧}{٦}$ ل

و يكون جدول الكتل و الاحداثيات كما يلى :

الكتل	٤ ك	ك
س	$\frac{١}{٢}$ ل	$\frac{٧}{٦}$ ل
ص	$\frac{١}{٢}$ ل	$\frac{١}{٢}$ ل

∴ $س_م = \frac{٤ك × \frac{١}{٢}ل + ك × \frac{١}{٢}ل}{٤ك + ك} = \frac{١٩}{٣٠}$ ل

، $ص_م = \frac{٤ك × \frac{١}{٢}ل + ك × \frac{٧}{٦}ل}{٤ك + ك} = \frac{١}{٢}$ ل

∴ موضع مركز الثقل هو = ($\frac{١٩}{٣٠}$ ل ، $\frac{١}{٢}$ ل) بالنسبة لنقطة أ

(٢١) تتكون صفيحة من جزئين : مستطيل أ ب حـ ء فيه :
أ ب = ١٢ سم ، ب حـ = ١٦ سم ، مثلث متساوى الساقين
حـ هـ ء فيه : ء هـ = ١٠ سم ، هـ خارج المستطيل
عين مركز ثقل المجموعة

الحل

باختيار الاتجاهين المتعامدين $\overleftarrow{\text{ب س}}$ ، $\overleftarrow{\text{ب ص}}$ كما بالشكل المقابل و ذلك باعتبار نقطة ب نقطة الأصل

، ∵ مساحة المستطيل = ١٦ × ١٢ = ١٩٢ سم^2 ،
مساحة المثلث = $\frac{1}{2}$ × ١٢ × ٨ = ٤٨ سم^2
حيث من هندسة الشكل : هـ ن = ٨ سم ، ء حـ = ١٢ سم
∴ مساحة المستطيل : مساحة المثلث = ٤ : ١
، ∵ الصفيحة رقيقة منتظمة الكثافة ∴ المساحات تتناسب مع الكتل
بفرض أن كتلة المستطيل = ٤ ك ∴ كتلة المثلث = ك
حيث : كتلة المربع تؤثر عند نقطة تلاقى قطريه م$_1$ (٨ ، ٦)
، كتلة المثلث تؤثر عند تلاقى متوسطاته م$_2$ ($\frac{56}{3}$ ، ٦)
حيث : م$_2$ ن = $\frac{1}{3}$ هـ ن = $\frac{1}{3}$ × ٨ = $\frac{8}{3}$ سم
∴ ب م$_2$ = $\frac{8}{3}$ + ١٦ = $\frac{56}{3}$ سم و يكون جدول الكتل و الاحداثيات كما يلى :

الكتل	٤ ك	ك
س	٨	$\frac{56}{3}$
ص	٦	٦

∴ سَ = $\frac{4ك \times 8 + ك \times \frac{56}{3}}{4ك + ك}$ = $\frac{152}{15}$

، صَ = $\frac{4ك \times 6 + ك \times 6}{4ك + ك}$ = ٦

∴ موضع مركز الثقل هو = ($\frac{152}{15}$ ، ٦) بالنسبة لنقطة ب

(٢٢) أ ب حـ ء صفيحة منتظمة السمك و الكثافة على شكل مستطيل فيه
أ ب = ١٢ سم ، ب حـ = ١٦ سم ، هـ نقطة تقاطع قطريه $\overline{\text{أ حـ}}$
، $\overline{\text{ب ء}}$ ، فصل المثلث أ هـ ء و ثُبت فوق المثلث ب هـ حـ ، أوجد
مركز ثقل الصفيحة في هذه الحالة ، و إذا عُلقت الصفيحة تعليقاً
حراً من نقطة حـ ، فأوجد ظل زاوية ميل $\overleftarrow{\text{حـ ب}}$ على الرأسى

الحل

نختار اتجاهين متعامدين $\overleftarrow{\text{حـ س}}$ ، $\overleftarrow{\text{حـ ص}}$ كما بالشكل المقابل و ذلك باعتبار نقطة حـ نقطة الأصل
، من هندسة الشكل :
مساحة المثلث أ ب هـ = مساحة المثلث ء حـ هـ
= $\frac{1}{2}$ × ١٢ × ٨ = ٤٨ سم^2 ،
مساحة المثلث أ ء هـ = مساحة المثلث ب حـ هـ
= $\frac{1}{2}$ × ١٦ × ٦ = ٤٨ سم^2
، ∵ الصفيحة منتظمة الكثافة ∴ المساحات تتناسب مع الكتل
بفرض أن كتلة المثلث أ ب هـ = ك ، تؤثر فى م$_1$
حيث : م$_1$ هـ = $\frac{2}{3}$ ز هـ = $\frac{2}{3}$ × ٨ = $\frac{16}{3}$ ∴ ع م$_1$ = ٨ + $\frac{16}{3}$ = $\frac{40}{3}$
، كتلة المثلث ء حـ هـ = ك ، تؤثر فى م$_2$
حيث : م$_2$ ع = $\frac{1}{3}$ ع هـ = $\frac{1}{3}$ × ٨ = $\frac{8}{3}$
∴ مساحة ب حـ هـ فى الوضع الجديد = ٢ ك ، تؤثر فى م$_3$
حيث : م$_3$ ن = $\frac{1}{3}$ ن هـ = $\frac{1}{3}$ × ٦ = ٢
و يكون جدول الكتل و الاحداثيات كما يلى :

الكتل	٢ ك	ك	ك
س	٨	$\frac{40}{3}$	$\frac{8}{3}$
ص	٢	٦	٦

$\therefore \text{س}_م = \dfrac{٢ك \times ٨ + ك \times \frac{٤٠}{٣} + ك \times \frac{٨}{٣}}{٤ك + ك + ك} = ٨$

، $\text{ص}_م = \dfrac{٢ك \times ٢ + ك \times ٦ + ك \times ٦}{٤ك + ك + ك} = ٤$

$\therefore$ موضع مركز الثقل هو = (٨ ، ٤) بالنسبة لنقطة حـ

عند التعليق من حـ كما بالشكل المقابل :

يكون : طا θ = $\frac{٤}{٨}$ = $\frac{١}{٢}$

$\therefore$ ظل زاوية ميل $\overleftarrow{\text{حـ ب}}$ على الرأسى = $\frac{١}{٢}$

٦ – ٢ طريقة الكتلة السالبة

بفرض أن : جسماً كتلته ك و مركز ثقل م و اقتطعنا منه جزأً كتلته $ك_١$ ، و مركز ثقله $م_١$ كما بالشكل المقابل

فإن الجزء المتبقى ستصبح كتلته هى : (ك – $ك_١$) و مركز ثقله $م_٢$

و إذا كان : $\overleftarrow{ر}_م$ ، $\overleftarrow{ر}_{م_٢}$ ، $\overleftarrow{ر}_{م_١}$ متجهات موضع $م_١$ ، $م_١$ ، م على الترتيب بالنسبة لنقطة الأصل (و) فإن :

$\overleftarrow{ر}_م = \dfrac{ك_١ \overleftarrow{ر}_{م_١} + (ك - ك_١)\overleftarrow{ر}_{م_٢}}{ك}$ بضرب الطرفين × ك ينتج :

$ك \overleftarrow{ر}_م = ك_١ \overleftarrow{ر}_{م_١} + (ك - ك_١)\overleftarrow{ر}_{م_٢}$

$\therefore (ك - ك_١)\overleftarrow{ر}_{م_٢} = ك \overleftarrow{ر}_م - ك_١ \overleftarrow{ر}_{م_١}$

$\therefore \overleftarrow{ر}_{م_٢} = \dfrac{ك \overleftarrow{ر}_م - ك_١ \overleftarrow{ر}_{م_١}}{ك - ك_١}$

بالتعويض عن $\overleftarrow{ر}_م$ ، $\overleftarrow{ر}_{م_١}$ بدلالة مركباتها الجبرية فى اتجاه المحاور المتعامدة $\overleftarrow{و س}$ ، $\overleftarrow{و ص}$ نحصل على احداثيات الجزء المتبقى و هما :

$\text{س}_{م_٢} = \dfrac{ك\,\text{س} - ك_١\text{س}_١}{ك - ك_١}$ ، $\text{ص}_{م_٢} = \dfrac{ك\,\text{ص} - ك_١\text{ص}_١}{ك - ك_١}$

حيث : (س ، ص) مركز ثقل الجسم الأصلى و كتلته ك ،

($\text{س}_١$ ، $\text{ص}_١$) مركز ثقل الجسم المقتطع و كتلته $ك_١$

و هذه القاعدة تعنى : عند ايجاد مركز ثقل الجسم المتبقى ينظر إليه كما لو كان مكوناً من جسمين هما :

(١) الجسم الأصلى و كتلته (ك)

(٢) الجسم المقتطع باعتبار كتلته ($-$ ك١)

لذلك سُميت الكتلة السالبة

إجابة حاول أن تحل (١) صفحة ١١٤

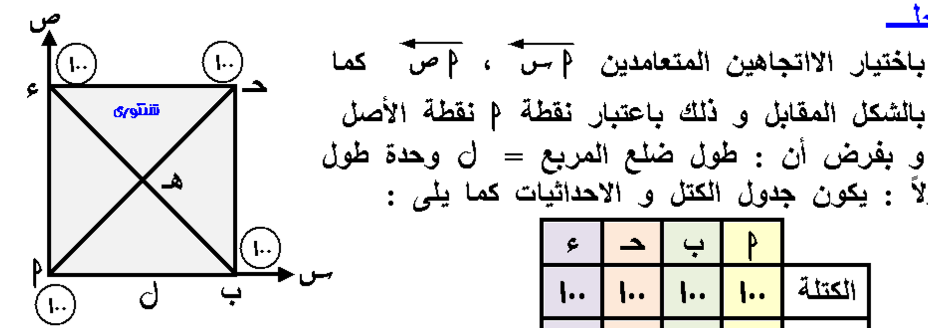
هل يمكنك حل مثال (١) بطرق أخرى عرفتها من الدرس السابق وضح ذلك و اكتب هذه الطرق الأخرى إن وجدت

" وُضعت أربع كتل متساوية مقدار كل منها ١٠٠ جم عند رؤوس المربع أ ب حـ ء

أولاً : عين مركز ثقل المجموعة بالنسبة إلى $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{أء}}$

ثانياً : إذا رُفعت الكتلة الموجودة عند الرأس حـ فعين مركز ثقل المجموعة المتبقية "

الحل



باختيار الاتجاهين المتعامدين $\overrightarrow{\text{أس}}$ ، $\overrightarrow{\text{أص}}$ كما بالشكل المقابل و ذلك باعتبار نقطة أ نقطة الأصل و بفرض أن : طول ضلع المربع = ل وحدة طول

أولاً : يكون جدول الكتل و الاحداثيات كما يلى :

	أ	ب	حـ	ء
الكتلة	١٠٠	١٠٠	١٠٠	١٠٠
س	٠	ل	ل	٠
ص	٠	٠	ل	ل

$$\therefore \text{س}_{\text{هـ}} = \frac{١٠٠ \times ٠ + ١٠٠ \times \text{ل} + ١٠٠ \times \text{ل} + ١٠٠ \times ٠}{١٠٠ + ١٠٠ + ١٠٠ + ١٠٠} = \frac{١}{٢}\,\text{ل}$$

$$، \text{ص}_{\text{هـ}} = \frac{١٠٠ \times ٠ + ١٠٠ \times ٠ + ١٠٠ \times \text{ل} + ١٠٠ \times \text{ل}}{١٠٠ + ١٠٠ + ١٠٠ + ١٠٠} = \frac{١}{٢}\,\text{ل}$$

∴ مركز ثقل المجموعة هو : ($\frac{١}{٢}$ ل ، $\frac{١}{٢}$ ل) بالنسبة لنقطة أ

أى عند نقطة هـ " مركز المربع ، نقطة تلاقى قطرى المربع "

طرق أخرى :

(١) ∵ الكتل متساوية عند رؤوس المربع أ ب حـ ء

∴ مركز ثقل المجموعة يؤثر عند نقطة هـ

(٢) مركز ثقل القوتين (١٠٠ جم) عند أ ، (١٠٠ جم) عند ب هو مركز ثقل كتلة مقدارها (٢٠٠ جم) و يؤثر عند ع منتصف $\overline{\text{أب}}$

، مركز ثقل القوتين (١٠٠ جم) عند حـ ، (١٠٠ جم) عند ء هو مركز ثقل كتلة مقدارها (٢٠٠ جم) و يؤثر عند ع منتصف $\overline{\text{حـء}}$

∴ مركز ثقل القوتين (٢٠٠ جم) عند ع ، (٢٠٠ جم) عند ع ، هو مركز ثقل كتلة مقدارها (٤٠٠ جم) و يؤثر عند هـ

ثانياً : مركز ثقل الكتلة المرفوعة (١٠٠ جم) عند حـ هو : (ل ، ل)

يكون جدول الكتل و الاحداثيات كما يلى :

	هـ	حـ
الكتل	٤٠٠	$-$ ١٠٠
س	$\frac{١}{٢}$ ل	ل
ص	$\frac{١}{٢}$ ل	٠

$$\therefore \text{س}_{\text{م}} = \frac{٤٠٠ \times \frac{١}{٢}\,\text{ل} - ١٠٠ \times \text{ل}}{٤٠٠ - ١٠٠} = \frac{١}{٣}\,\text{ل}$$

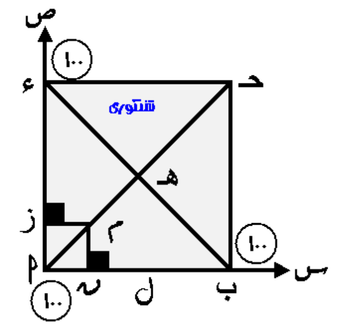
$$، \text{ص}_{\text{م}} = \frac{٤٠٠ \times \frac{١}{٢}\,\text{ل} - ١٠٠ \times \text{ل}}{٤٠٠ - ١٠٠} = \frac{١}{٣}\,\text{ل}$$

∴ مركز ثقل المجموعة المتبقية هو : ($\frac{١}{٣}$ ل ، $\frac{١}{٣}$ ل) بالنسبة لنقطة أ

طرق أخرى :

(١) باعتبار نقطة أ نقطة الأصل

يكون جدول الكتل و الاحداثيات كما يلى :



	أ	ب	ء
الكتلة	١٠٠	١٠٠	١٠٠
س	٠	ل	٠
ص	٠	٠	ل

$$\therefore \text{س}_{م} = \frac{١٠٠ \times ٠ + ١٠٠ \times \text{ل} + ١٠٠ \times ٠}{١٠٠ + ١٠٠ + ١٠٠ + ١٠٠} = \frac{١}{٣}\,\text{ل}$$

$$،\ \text{ص}_{م} = \frac{١٠٠ \times ٠ + ١٠٠ \times ٠ + ١٠٠ \times \text{ل}}{١٠٠ + ١٠٠ + ١٠٠ + ١٠٠} = \frac{١}{٣}\,\text{ل}$$

(٢) مركز ثقل القوتين (١٠٠ جم) عند ب ، (١٠٠ جم) عند ء ، هو مركز ثقل كتلة مقدارها (٢٠٠ جم) و يؤثر عند هـ

∴ مركز ثقل القوتين (١٠٠ جم) عند أ ، (٢٠٠ جم) عند هـ ، هو مركز ثقل كتلة مقدارها (٣٠٠ جم) و يؤثر عند م

حيث : $\text{أ م} = \frac{٢}{٣}\,\text{أ هـ} = \frac{٢}{٣} \times \frac{١}{٢}\,\text{أ حـ} = \frac{١}{٣}\,\text{ل}\sqrt{٢}$

، ∵ ق($\angle$ م أ ن) = ٤٥° " خواص المربع "

$$\therefore \text{س}_{م} = \frac{١}{٣}\,\text{ل}\sqrt{٢}\ \text{حتا}\ ٤٥^{\circ} = \frac{١}{٣}\,\text{ل}$$

$$،\ \text{ص}_{م} = \frac{١}{٣}\,\text{ل}\sqrt{٢}\ \text{حا}\ ٤٥^{\circ} = \frac{١}{٣}\,\text{ل}$$

(٣) ∵ الكتل متساوية عند رؤوس المثلث أ ب ء

∴ مركز ثقل المجموعة يؤثر عند نقطة تلاقى متوسطات المثلث أ ب ء

، ∵ أ (٠ ، ٠) ، ب (ل ، ٠) ، ء (٠ ، ل)

$$\therefore \text{م} = \left(\frac{١}{٣} \times (\text{ل} + ٠ + ٠) ،\ \frac{١}{٣} \times (٠ + \text{ل} + ٠) \right)$$

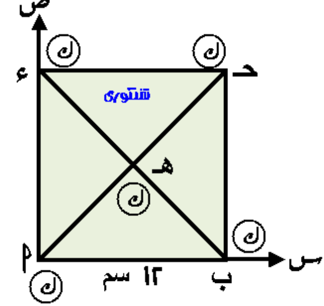
$$= \left(\frac{١}{٣}\,\text{ل} ،\ \frac{١}{٣}\,\text{ل} \right)$$

إجابة حاول أن تحل (٢) صفحة ١١٥

وُضعت خمس كتل متساوية عند الرؤوس أ ، ب ، حـ ، ء ، هـ لمربع أ ب حـ ء حيث هـ ملتقى قُطريه و طول ضلع المربع ١٢ سم عين مركز ثقل المجموعة ، و إذا رُفعت الكتلة الموجودة عند ب فعين مركز ثقل المجموعة المتبقية بالنسبة للمحورين $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{أ ء}}$

الحل

باختيار الاتجاهين المتعامدين $\overleftarrow{\text{أ س}}$ ، $\overleftarrow{\text{أ ص}}$ كما بالشكل المقابل و ذلك باعتبار نقطة أ نقطة الأصل و بفرض أن كل كتلة عند كل رأس = ك



يكون جدول الكتل و الاحداثيات كما يلى :

	أ	ب	حـ	ء	هـ
الكتلة	ك	ك	ك	ك	ك
س	٠	١٢	١٢	٠	٦
ص	٠	٠	١٢	١٢	٦

$$\therefore \text{س}_{م} = \frac{\text{ك} \times ٠ + \text{ك} \times ١٢ + \text{ك} \times ١٢ + \text{ك} \times ٠ + \text{ك} \times ٦}{\text{ك} + \text{ك} + \text{ك} + \text{ك} + \text{ك}} = ٦$$

$$،\ \text{ص}_{م} = \frac{\text{ك} \times ٠ + \text{ك} \times ٠ + \text{ك} \times ١٢ + \text{ك} \times ١٢ + \text{ك} \times ٦}{\text{ك} + \text{ك} + \text{ك} + \text{ك} + \text{ك}} = ٦$$

∴ مركز ثقل المجموعة هو : (٦ ، ٦) بالنسبة لنقطة أ

أى عند مركز المربع

عند رفع الكتلة الموجودة عند ب :

	هـ	حـ
الكتل	٥ ك	− ك
س	٦	١٢
ص	٦	٠

$$\therefore \text{س}_{ن} = \frac{٥\text{ك} \times ٦ - \text{ك} \times ١٢}{٥\text{ك} - \text{ك}} = ٤{,}٥$$

$$،\ \text{ص}_{ن} = \frac{٥\text{ك} \times ٦ - \text{ك} \times ٠}{٥\text{ك} - \text{ك}} = ٧{,}٥$$

∴ مركز ثقل المجموعة المتبقية هو : (٤,٥ ، ٧,٥) بالنسبة لنقطة أ

مركز ثقل بعض الأجسام التى لها خصائص تماثل :

تماثل صفيحة هندسية رقيقة منتظمة الكثافة

باعتبار $\overleftrightarrow{أ ب}$ محور تماثل للصفيحة المنتظمة لذا فهو يُقسِّم الصفيحة إلى جزأين متماثلين تماماً من حيث الشكل و بالتالى من حيث الكتلة كما فى الشكل المقابل

و بفرض أن : $م_١$ ، $م_٢$ هما مركزى ثقل الجزأين

من الواضح أن : محور التماثل يقطع $\overline{م_١ م_٢}$ على التعامد من منتصفها

، ∵ مركز ثقل الصفيحة هو نفسه مركز ثقل كتلتين متساويتين موضوعتين عند $م_١$ ، $م_٢$ ∴ مركز ثقل الصفيحة يقع عند منتصف $\overline{م_١ م_٢}$

أى على محور التماثل ، و من ذلك نستنتج :

إذا وجد محور تماثل هندسى لصفيحة رقيقة منتظمة الكثافة فإن مركز ثقلها يقع على هذا المحور

بعض المجسمات الهندسية المنتظمة الكثافة :

تماثل المجسمات الهندسية يماثل تماماً تماثل الأشكال الهندسية بعد الاستعاضة عن محور التماثل بمستوى تماثل كما بالشكل المقابل

و من ذلك نستنتج :

إذا وجد مستوى تماثل هندسى لمجسم منتظم الكثافة فإن مركز ثقله يقع على هذا المستوى

من التماثل السابق للشكل الهندسى المنتظم و المجسم الهندسى المنتظم يمكن تحديد بعض الحالات الخاصة لمركز الثقل كما يلى :

(١) مركز ثقل سلك منتظم الكثافة على هيئة دائرة يقع فى مركز الدائرة

(٢) مركز ثقل صفيحة منتظمة الكثافة على شكل دائرة يقع فى مركز الدائرة

(٣) مركز ثقل قشرة كروية منتظمة الكثافة يقع فى مركز الكرة

(٤) مركز ثقل كرة مصمتة منتظمة الكثافة يقع فى مركز الكرة

(٥) مركز ثقل مجسم منتظم الكثافة على هيئة متوازى مستطيلات يقع فى مركزه الهندسى

(٦) مركز ثقل اسطوانة دائرية قائمة منتظمة الكثافة يقع عند نقطة منتصف محورها

(٧) مركز ثقل اسطوانة دائرية قائمة مصمتة منتظمة الكثافة يقع عند نقطة منتصف محورها

(٨) مركز ثقل منشور قائم منتظم الكثافة يقع عند نقطة منتصف المحور الموازى لأحرفه الجانبية و المار بمركز ثقل قاعدتيه باعتبارهما صفيحتين رقيقتين منتظمتى الكثافة

إجابة حاول أن تحل (٣) صفحة ١١٧

صفيحة رقيقة منتظمة السمك و الكثافة على شكل قرص دائرى مركزه نقطة الأصل و طول نصف قطره ٦ وحدات طول ، قُطع منه قرصان دائريان مركز أحدهما (−١ ، −٣) ، و طول نصف قطره وحدة طول واحدة ، و مركز الآخر (١ ، ٢) ، و طول نصف قطره ٣ وحدات طول ، أوجد مركز ثقل الجزء الباقى من القرص

الحل

∵ الكتل تتناسب مع المساحات

، ∵ مساحة القرص م : مساحة القرص $م_١$: مساحة القرص $م_٢$

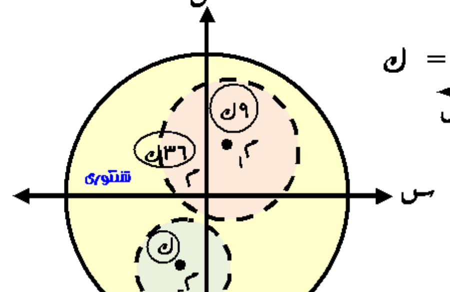
$= ٣٦ \pi : ٩ \pi : \pi = ٣٦ : ٩ : ١$

∴ نفرض أن : كتلة القرص م = ٣٦ ك

، كتلة القرص $م_1$ = ٩ ك ، كتلة القرص $م_2$ = ك

و باختيار الاتجاهين المتعامدين $\overleftarrow{م س}$ ، $\overleftarrow{م ص}$

يكون جدول الكتل و الاحداثيات كما يلى :



الكتلة	٣٦ ك	− ٩ ك	− ك
س	٠	١	− ١
ص	٠	٢	− ٣

∴ $س_م = \frac{٣٦ك \times ٠ - ٩ك \times ١ - ك \times (-١)}{٣٦ك - ٩ك - ك} = -\frac{٤}{١٣}$

، $ص_م = \frac{٣٦ك \times ٠ - ٩ك \times ٢ - ك \times (-٣)}{٣٦ك - ٩ك - ك} = -\frac{١٥}{٢٦}$

∴ مركز ثقل الجزء الباقى هو : ($-\frac{٤}{١٣}$ ، $-\frac{١٥}{٢٦}$) بالنسبة لنقطة الأصل م

إجابة حاول أن تحل (٤) صفحة ١١٨

صفيحة رقيقة منتظمة على شكل مستطيل أ ب حـ ء الذى فيه : أ ب = ٦ سم ، ب حـ = ٨ سم ، قُطعت منها قطعة مربعة الشكل من الرأس ب طول ضلعها ٤ سم ، أوجد بُعد مركز ثقل الجزء الباقى عن كل من $\overline{حـ ء}$ ، $\overline{حـ ب}$ ، ثم إذا علق الجزء الباقى تعليقاً حراً من الرأس حـ فأوجد فى وضع التوازن ظل زاوية ميل $\overline{حـ ب}$ على الرأسى

الحل

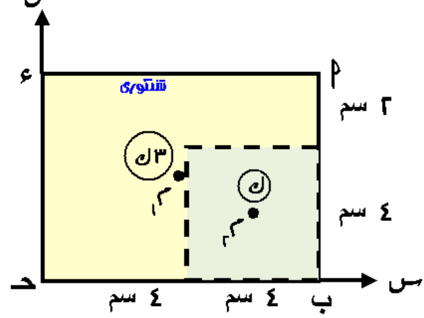
∵ الكتل تتناسب مع المساحات

، ∵ مساحة المستطيل : مساحة المربع

= ٤٨ : ١٦ = ٣ : ١

∴ نفرض أن : كتلة المستطيل = ٣ ك

و تؤثر عند $م_1$ (٤ ، ٣)



، كتلة المربع = ك ، و تؤثر عند $م_2$ = (٦ ، ٢)

، نختار اتجاهين متعامدين $\overleftarrow{حـ س}$ ، $\overleftarrow{حـ ص}$

كما بالشكل و ذلك باعتبار نقطة حـ نقطة الأصل

يكون جدول الكتل و الاحداثيات كما يلى :

الكتلة	٣ ك	− ك
س	٤	٦
ص	٣	٢

∴ $س_م = \frac{٣ك \times ٤ - ك \times ٦}{٣ك - ك} = ٣$

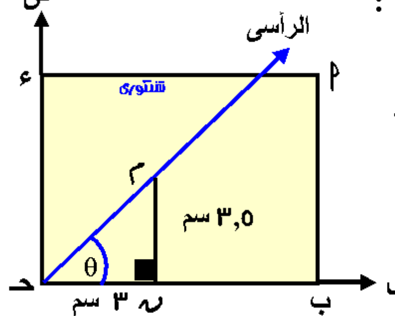
، $ص_م = \frac{٣ك \times ٣ - ك \times ٢}{٣ك - ك} = \frac{٧}{٢}$

∴ مركز ثقل الجزء الباقى هو : (٣ ، $\frac{٧}{٢}$) بالنسبة لنقطة حـ

عند التعليق من نقطة حـ كما بالشكل المقابل :

يكون : طا θ = $\frac{٧}{٢}$ ÷ ٣ = $\frac{٧}{٦}$

∴ ظل زاوية ميل $\overline{حـ ب}$ على الرأسى = $\frac{٧}{٦}$



أحمد الشنتورى

حل تمارين (٦ – ٢) صفحة ١١٩ بالكتاب المدرسى

أولاً : أكمل ما يلى :

(١) تُسمى النقطة الثابتة فى الجسم التى يمر بها خط عمل محصلة أوزان الجسيمات التى يتكون منها الجسم مهما تغير وضعه بالنسبة للأرض بـ ....

الحل

تُسمى النقطة الثابتة فى الجسم التى يمر بها خط عمل محصلة أوزان الجسيمات التى يتكون منها الجسم مهما تغير وضعه بالنسبة للأرض بمركز الثقل

(٢) يقع مركز ثقل الجسم الجاسئ المعلق تعليقاً حراً على الخط المستقيم المار بـ ....

الحل

يقع مركز ثقل الجسم الجاسئ المعلق تعليقاً حراً على الخط المستقيم المار بنقطة التعليق

(٣) مركز ثقل قضيب رفيع منتظم الكثافة يقع عند ....

الحل

مركز ثقل قضيب رفيع منتظم الكثافة يقع عند نقطة منتصفه

(٤) مركز ثقل الصفيحة المنتظمة المحدودة بشكل متوازى أضلاع يقع عند ....

الحل

مركز ثقل الصفيحة المنتظمة المحدودة بشكل متوازى أضلاع يقع عند مركزه الهندسى (نقطة تلاقى قطريه)

(٥) مركز ثقل الصفيحة المنتظمة المحدودة بمثلث يقع عند نقطة تلاقى ....

الحل

مركز ثقل الصفيحة المنتظمة المحدودة بمثلث يقع عند نقطة تلاقى متوسطات المثلث

(٦) إذا وُجد محور تماثل هندسى لصفيحة رقيقة منتظمة الكثافة فإن مركز ثقلها يقع على ....

الحل

إذا وُجد محور تماثل هندسى لصفيحة رقيقة منتظمة الكثافة فإن مركز ثقلها يقع على خط هذا المحور

(٧) إذا وُجد مستوى تماثل هندسى لمجسم منتظم الكثافة ، وقع مركز ثقله فى ....

الحل

إذا وُجد مستوى تماثل هندسى لمجسم منتظم الكثافة وقع مركز ثقله فى هذا المستوى

(٨) مركز ثقل صفيحة منتظمة الكثافة محدودة بدائرة يقع فى ....

الحل

مركز ثقل صفيحة منتظمة الكثافة محدودة بدائرة يقع فى مركز الدائرة

(٩) مركز ثقل كرة مصمتة منتظمة الكثافة يقع فى ....

الحل

مركز ثقل كرة مصمتة منتظمة الكثافة يقع فى مركز الكرة

(١٠) مركز ثقل مجسم منتظم الكثافة على هيئة متوازى مستطيلات يقع فى ....

الحل

مركز ثقل مجسم منتظم الكثافة على هيئة متوازى مستطيلات يقع فى مركزه الهندسى

(١١) مركز ثقل قشرة اسطوانية دائرية قائمة منتظمة الكثافة يقع عند نقطة

الحل

مركز ثقل قشرة اسطوانية دائرية قائمة منتظمة الكثافة يقع عند نقطة منتصف محورها

ثانياً : اجب عن الأسئلة الآتية :

(١٢) وُضعت ٤ كتل متساوية عند الرؤوس أ ، ب ، حـ ، ء لمربع طول ضلع المربع ٨٠ سم ثُم أُضيفت كتلة خامسة مساوية لها عند مركزه عين مركز ثقل المجموعة ، و إذا رُفعت الكتلة الموجودة عند أ عين مركز ثقل المجموعة باستخدام الكتلة السالبة

الحل

∵ الكتل متساوية عند رؤوس المربع متساوية

∴ مركز ثقل هذه الكتل يقع عند مركز المربع

" نقطة تلاقى القطرين هـ (٤٠ ، ٤٠)

، و بفرض أن كل كتلة = ك

∴ كتلة المربع = ٤ ك

، ∵ الكتلة عند هـ مساوية للكتل عند الرؤس أى = ك

∴ كتلة المجموعة = ٥ ك ، مركز ثقل المجموعة يقع عند هـ (٤٠ ، ٤٠)

حل آخر

باختيار الاتجاهين المتعامدين أس→ ، أص→ كما بالشكل المقابل و ذلك باعتبار نقطة أ نقطة الأصل

و بفرض أن كل كتلة = ك

يكون جدول الكتل و الاحداثيات كما يلى :

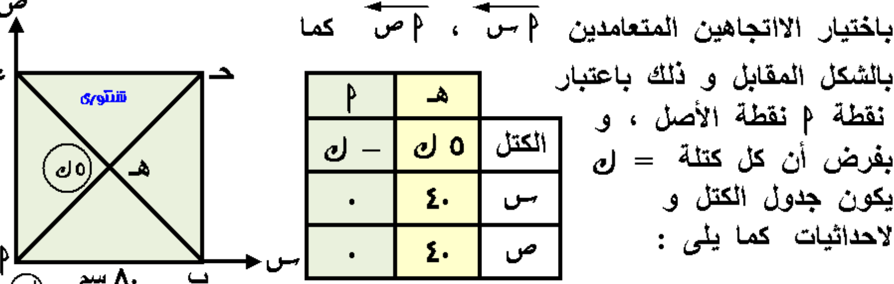
الكتلة	أ	ب	حـ	ء	هـ
	ك	ك	ك	ك	ك
س	٠	٨٠	٨٠	٠	٤٠
ص	٠	٠	٨٠	٨٠	٤٠

∴ سم = (ك × ٠ + ك × ٨٠ + ك × ٨٠ + ك × ٠ + ك × ٤٠) ÷ (ك + ك + ك + ك + ك) = ٤٠

، صم = (ك × ٠ + ك × ٠ + ك × ٨٠ + ك × ٨٠ + ك × ٤٠) ÷ (ك + ك + ك + ك + ك) = ٤٠

∴ مركز ثقل المجموعة هو : (٤٠ ، ٤٠) بالنسبة لنقطة أ أى عند مركز المربع

عند رفع الكتلة الموجودة عند أ : " باستخدام الكتلة السالبة "



باختيار الاتجاهين المتعامدين أس→ ، أص→ كما بالشكل المقابل و ذلك باعتبار نقطة أ نقطة الأصل ، و بفرض أن كل كتلة = ك يكون جدول الكتل و الاحداثيات كما يلى :

الكتل	هـ	أ
	٥ ك	− ك
س	٤٠	٠
ص	٤٠	٠

∴ سم = (٥ك × ٤٠ − ك × ٠) ÷ (٥ك − ك) = ٥٠

، صم = (٥ك × ٤٠ − ك × ٠) ÷ (٥ك − ك) = ٥٠

∴ مركز ثقل المجموعة المتبقية هو : (٥٠ ، ٥٠) بالنسبة لنقطة أ

حل آخر

باختيار الاتجاهين المتعامدين أس→ ، أص→ كما بالشكل المقابل و ذلك باعتبار نقطة أ نقطة الأصل

و بفرض أن كل كتلة = ك

يكون جدول الكتل و الاحداثيات كما يلى :

الكتلة	ب	حـ	ء	هـ
	ك	ك	ك	ك
س	٨٠	٨٠	٠	٤٠
ص	٠	٨٠	٨٠	٤٠

∴ سم = (ك × ٨٠ + ك × ٨٠ + ك × ٠ + ك × ٤٠) ÷ (ك + ك + ك + ك) = ٥٠

، صم = (ك × ٠ + ك × ٨٠ + ك × ٨٠ + ك × ٤٠) ÷ (ك + ك + ك + ك) = ٥٠

∴ مركز ثقل المجموعة هو : (٥٠ ، ٥٠) بالنسبة لنقطة أ

(١٢) صفيحة رقيق منتظمة على شكل قرص دائرى طول نصف قطره ٣٠ سم أُقتطع منه جزء على شكل قرص دائرى طول نصف قطره ١٠ سم و يبعد عن مركز الصفيحة ٢٠ سم أوجد مركز ثقل الجزء المتبقى

الحل

∵ الكتل تتناسب مع المساحات

، ∵ مساحة القرص $م_١$: مساحة القرص $م_٢$

= ٩٠٠ π : ١٠٠ π = ٩ : ١

∴ نفرض أن : كتلة القرص م = ٣٦ك

، كتلة القرص $م_١$ = ٩ك ، كتلة القرص $م_٢$ = ك

و باختيار الاتجاهين المتعامدين $\overleftarrow{م_١ س}$ ، $\overleftarrow{م_١ ص}$

باعتبار أن $م_١$ نقطة الأصل فيكون جدول الكتل و الاحداثيات كما يلى :

الكتلة	٩ك	−ك
س	٠	٢٠
ص	٠	٠

∴ $س_م = \frac{٩ك \times ٠ - ك \times ٢٠}{٩ك - ك} = -٢,٥$

، $ص_م$ = صفر

∴ مركز ثقل الجزء الباقى هو : (−٢,٥ ، ٠) بالنسبة لنقطة الأصل $م_١$

(١٣) ا ب حـ مثلث متساوى الأضلاع طول ضلعه ١٢ سم ، م مركز ثقله أُقتطع منه المثلث م ب حـ عين مركز ثقل الجزء المتبقى

الحل

نختار اتجاهين متعامدين $\overleftarrow{حـ س}$ ، $\overleftarrow{حـ ص}$

كما بالشكل المقابل و ذلك باعتبار نقطة حـ نقطة الأصل

، من هندسة الشكل : ب ء = ٦ سم

ا ء = ١٢ جا ٦٠° = ٦ $\sqrt{٣}$ سم

، ا م = $\frac{٢}{٣}$ ا ء = ٤ $\sqrt{٣}$ سم

، م ء = ٢ $\sqrt{٣}$ سم ، ∵ الكتل تتناسب مع المساحات

، ∵ مساحة المثلث ا ب حـ : مساحة المثلث م ب حـ

= $\frac{١}{٢}$ × ١٢ × ٦ $\sqrt{٣}$: $\frac{١}{٢}$ × ١٢ × ٢ $\sqrt{٣}$ = ٣ : ١

∴ نفرض أن : كتلة المثلث ا ب حـ = ٣ك ، كتلة المثلث م ب حـ = ك

و نكون جدول الكتل و احداثياتها كما يلى :

الكتلة	٣ك	−ك
س	٦	٦
ص	٦ $\sqrt{٣}$	٢ $\sqrt{٣}$

∴ $س_م = \frac{٣ك \times ٦ - ك \times ٦}{٣ك - ك} = ٦$

، $ص_م = \frac{٣ك \times ٦\sqrt{٣} - ك \times ٢\sqrt{٣}}{٣ك - ك} = \frac{٨}{٣}\sqrt{٣}$

∴ مركز ثقل الجزء الباقى هو (٦ ، $\frac{٨}{٣}\sqrt{٣}$) بالنسبة لنقطة حـ

(١٠) صفيحة رقيقة منتظمة على شكل مثلث متساوى الساقين ا ب حـ فيه : ا ب = ا حـ ، $\overline{ا ء}$ هو ارتفاع المثلث و طوله ٤٥ سم رُسم مستقيم موازٍ للقاعدة $\overline{ب حـ}$ و يمر بمركز ثقل الصفيحة فقطع $\overline{ا ب}$ ، $\overline{ا حـ}$ فى النقطتين هـ ، و على الترتيب ، اثبت أن مركز ثقل الشكل الرباعى هـ ب حـ و يقع على $\overline{ا ء}$ و يبعد ٧ سم عن نقطة ء

الحل

نختار اتجاهين متعامدين $\overleftarrow{حـ س}$ ، $\overleftarrow{حـ ص}$

كما بالشكل المقابل و ذلك باعتبار نقطة حـ نقطة الأصل

، من هندسة الشكل : ا م = $\frac{٢}{٣}$ ا ء = ٣٠ سم

، △ ا ب حـ ~ △ ا هـ و ، و يكون :

ب حـ : هـ و = ٣ : ٢

∴ نفرض أن : ب حـ = ٣ل ، هـ و = ٢ل

، ∵ مساحة المثلث أ ب حـ : مساحة المثلث أ هـ و

= $\frac{1}{2}$ × ٣ل × ٤٥ : $\frac{1}{2}$ × ٢ل × ٣٠ = ٩ : ٤

∴ نفرض أن : كتلة المثلث أ ب حـ = ٩ك ، كتلة المثلث م ب حـ = ٥ك

حيث : م ء = $\frac{1}{3}$ أ ء = ١٥ سم ، م١ ء = م ء + $\frac{2}{3}$ أ م = ٢٥ سم

و نكون جدول الكتل و احداثياتها كما يلى :

الكتلة	٩ ك	− ٤ ك
س	١,٥ ل	١,٥ ل
ص	١٥	٢٥

∴ س م = $\frac{\text{٩ك} \times \text{١,٥ل} - \text{٤ك} \times \text{١,٥ل}}{\text{٩ك} - \text{٤ك}}$ = ١,٥ ل

∴ مركز ثقل الشكل الرباعى هـ ب حـ و يقع على أء

، ص م = $\frac{\text{٩ك} \times \text{١٥} - \text{٤ك} \times \text{٢٥}}{\text{٩ك} - \text{٤ك}}$ = ٧

∴ مركز ثقل الشكل الرباعى هـ ب حـ و يبعد عن نقطة مسافة : ٧ سم

(١٦) سلك منتظم طوله ١٠٠ سم ثُنى على هيئة خمسة أضلاع من مسدس منتظم أ ب حـ ء هـ و بدأ من نقطة أ ، عين بعد مركز ثقله عن مركز المسدس ، و إذا علق السلك تعليقاً حراً من طرفه أ عين قياس زاوية ميل أب على الرأسى فى وضع التوازن

الحل

طول كل ضلع = ١٠٠ ÷ ٥ = ٢٠ سم

بأخذ الاتجاهين المتعامدين ى س ، ى ص

حيث ى " مركز المسدس " نقطة الأصل

و بفرض أن كل كتلة عند كل ضلع = ٢ ك و تؤثر فى منتصف كل منها

و توزع عند كل رأس

فتكون الكتل كما بالشكل المقابل

، و تكون الكتل و احداثياتها كما بالجدول التالى :

	عند أ	عند ب	عند حـ	عند ء	عند هـ	عند و
الكتلة	ك	٢ ك	٢ ك	٢ ك	٢ ك	ك
س	١٠	٢٠	١٠	− ١٠	− ٢٠	− ١٠
ص	١٠√٣	٠	− ١٠√٣	− ١٠√٣	٠	١٠√٣

س م = $\frac{\text{ك} \times ١٠ + \text{٢ك} \times ٢٠ + \text{٢ك} \times ١٠ - \text{٢ك} \times ١٠ - \text{٢ك} \times ٢٠ - \text{ك} \times ١٠}{\text{ك} + \text{٢ك} + \text{٢ك} + \text{٢ك} + \text{٢ك} + \text{ك}}$ = ٠

ص م = $\frac{\text{ك} \times ١٠\sqrt{٣} - \text{٢ك} \times ١٠\sqrt{٣} - \text{٢ك} \times ١٠\sqrt{٣}\ ٠ - \text{ك} \times ١٠\sqrt{٣}}{\text{ك} + \text{٢ك} + \text{٢ك} + \text{٢ك} + \text{٢ك} + \text{ك}}$ = − ٢√٣

∴ مركز الثقل هو (٠ ، − ٢√٣) بالنسبة لنقطة ى ، ∵ ى (٠ ، ٠)

∴ مركز ثقل السلك يبعد ٢√٣ عن مركز المسدس عند التعليق من أ

و يكون أم هو الخط الرأسى المار بنقطة التعليق أ

من الرسم نجد : طا (∠ ن أ م) = $\frac{١٢\sqrt{٣}}{١٠}$ = $\frac{٦\sqrt{٣}}{٥}$

∴ ق (∠ ن أ م) = ٦٤° ١٨' ، ∵ قياس زاوية رأس المسدس = ١٢٠°

∴ ق (∠ θ) = ١٢٠° − ٦٤° ١٨' = ٥٥° ٤٢'

حل آخر " لايجاد مركز الثقل "

∵ المسدس منتظم ∴ أطوال أضلاعه متساوية و تتناسب مع كتلها

، ∵ طول السلك = ١٠٠ سم ∴ طول كل ضلع = ١٠٠ ÷ ٥ = ٢٠ سم

∴ طول الضلع السادس (أ ء) = ٢٠ سم ،

مجموع أطوال أضلاع المسدس = ١٢٠ سم

∴ طول (أ ء) : مجموع أطوال أضلاع المسدس

= ٢٠ : ١٢٠ = ١ : ٦

، بفرض أن : كتلة أضلاع المسدس = ٦ ك

، و يؤثر عند نقطة ى

، كتلة طول (أ ء) = ك

، و يؤثر عند نقطة تبعد نقطة ن

حيث : ى ن = $\frac{1}{2}$ ن ز = $\frac{1}{2}$ × ٢٠ حا ٦٠° = ١٠ $\sqrt{3}$ سم

فتكون الكتل و احداثياتها كما بالجدول التالى :

الكتلة	٦ ك	− ك
س	٠	٠
ص	٠	١٠ $\sqrt{3}$

∴ $\bar{س}_م = \frac{٦ك \times ٠ - ك \times ٠}{٦ك - ك}$ = صفر

، $\bar{ص}_م = \frac{٦ك \times ٠ - ك \times ١٠\sqrt{3}}{٦ك - ك} = -٢\sqrt{3}$

∴ مركز الثقل = (٠ ، − ٢ $\sqrt{3}$) بالنسبة لنقطة ى

(١٧) صفيحة رقيقة محدودة بالمستطيل أ ب جـ ء حيث : أ ب = ٣٠ سم ، ب جـ = ٦٠ سم ، هـ منتصف $\overline{أ ء}$ ، ن منتصف $\overline{ء جـ}$ ، فإذا فُصل المثلث هـ ء ن من الصفيحة و عُلق الجزء الباقى تعليقاً حراً من النقطة ب فأوجد فى وضع التوازن ظل الزاوية التى يصنعها $\overline{ب جـ}$ مع الرأسى

الحل

باختيار الاتجاهين المتعامدين $\overrightarrow{ب س}$ ، $\overrightarrow{ب ص}$ كما بالشكل المقابل و ذلك باعتبار نقطة ب نقطة الأصل

∵ مساحة المستطيل أ ب جـ ء = ٦٠ × ٣٠ = ١٨٠٠ سم^2 ،

مساحة المثلث هـ ء ن = $\frac{1}{2}$ × ٣٠ × ١٥ = ٢٢٥ سم^2

∴ مساحة المستطيل : مساحة المثلث = ٨ : ١

، ∵ الصفيحة رقيقة منتظمة الكثافة ∴ المساحات تتناسب مع الكتل

بفرض أن كتلة المستطيل = ٨ ك ∴ كتلة المثلث = ك

حيث : كتلة المستطيل تؤثر عند نقطة تلاقى قطريه $م_1$ (٣٠ ، ١٥)

، كتلة المثلث تؤثر عند تلاقى متوسطاته $م_2$ (٥٠ ، ٢٥)

حيث : هـ (٣٠ ، ٣٠) ، ء (٦٠ ، ٣٠) ، ن (٦٠ ، ١٥)

∴ $م_2$ = ($\frac{1}{3}$ × (٣٠ + ٦٠ + ٦٠) ، $\frac{1}{3}$ × (٣٠ + ٣٠ + ١٥)) = (٥٠ ، ٢٥)

فتكون الكتل و احداثياتها كما بالجدول التالى :

الكتلة	٨ ك	− ك
س	٣٠	٥٠
ص	١٥	٢٥

∴ $\bar{س}_م = \frac{٨ك \times ٣٠ - ك \times ٥٠}{٨ك - ك} = ٢٧\frac{1}{7}$

، $\bar{ص}_م = \frac{٨ك \times ١٥ - ك \times ٢٥}{٨ك - ك} = ١٣\frac{4}{7}$

∴ مركز ثقل الجزء المتبقى هو (٢٧ $\frac{1}{7}$ ، ١٣ $\frac{4}{7}$) بالنسبة لنقطة ب

عند التعليق من نقطة ب فإن : ظا θ = ١٣ $\frac{4}{7}$ ÷ ٢٧ $\frac{1}{7}$ = $\frac{1}{2}$

أى أن : ظل الزاوية التى يصنعها $\overline{ب جـ}$ مع الرأسى = $\frac{1}{2}$

لاحظ أن : الرأسى ينطبق على القطر $\overline{ب ء}$

(١٨) صفيحة رقيقة منتظمة الكثافة على شكل مربع أ ب جـ ء طول ضلعه ٣٦ سم ، تقاطع قُطراه فى م و نصفت $\overline{ء م}$ فى نقطة هـ ، و فُصل منها المثلث هـ أ ء ، عين مركز ثقل الجزء الباقى من الصفيحة ، و إذا عُلقت الصفيحة تعليقاً خالصاً من نقطة أ حتى اتزنت فى مستوى رأسى فأوجد ميل $\overrightarrow{أ ب}$ على الرأسى

الحل

باختيار الاتجاهين المتعامدين $\overrightarrow{أ س}$ ، $\overrightarrow{أ ص}$ كما بالشكل المقابل و ذلك باعتبار نقطة أ نقطة الأصل

من هندسة الشكل : Δ أ ب ء ~ Δ و هـ ء

، ∵ ء هـ = $\frac{1}{2}$ ء م = $\frac{1}{4}$ ء ب

∴ ء هـ : ء ب = هـ و : أ ب

= و ء : أ ء = ١ : ٤

∴ و ء = $\frac{1}{4}$ أ ء = $\frac{1}{4}$ × ٣٦ = ٩ سم

∴ أ و = ٢٧ سم ، ∴ هـ و = $\frac{1}{4}$ أ ب = $\frac{1}{4}$ × ٣٦ = ٩ سم

∴ هـ (٩ ، ٢٧) ، ∵ ء (٠ ، ٣٦) ، أ (٠ ، ٠)

∴ م١ = (١/٣ × (٠ + ٠ + ٩) ، ١/٣ × ((٠ + ٣٦ + ٢٧)) = (٣ ، ٢١)

و هى نقطة تلاقى متوسطات △ و هـ ء

، ∵ الكتل تتناسب مع المساحات

، مساحة المربع أ ب حـ ء : مساحة △ و هـ ء

= ٣٦ × ٣٦ : ١/٢ × ٣٦ × ٩ = ٨ : ١

∴ نفرض أن : كتلة المربع أ ب حـ ء = ٨ك ، و تؤثر عند م (١٨ ، ١٨)

، كتلة △ و هـ ء = ك ، و تؤثر عند م١ (٣ ، ٢١)

فتكون الكتل و احداثياتها كما بالجدول التالى :

الكتلة	٨ ك	− ك
س	١٨	٣
ص	١٨	٢١

∴ س‍م = (٨ك × ٣٦ − ك × ٣) / (٨ك − ك) = ٢٠ ١/٧

، ص‍م = (٨ك × ١٨ − ك × ٢١) / (٨ك − ك) = ١٧ ٤/٧

∴ مركز ثقل الجزء المتبقى هو (٢٠ ١/٧ ، ١٧ ٤/٧) بالنسبة لنقطة أ

عند التعليق من نقطة أ فإن : طا θ = ١٧ ٤/٧ ÷ ٢٠ ١/٧ = ٤١/٤٧

أى أن : ظل الزاوية التى يصنعها أب مع الرأسى = ٤١/٤٧

(١٩) صفيحة منتظمة على شكل مربع أ ب حـ ء طول ضلعه ٨ سم ، فُصل منها قرص دائرى طول نصف قطره ٢ سم و يبعد مركزه ٣ سم عن كل من أب ، ب حـ ، عين مركز ثقل الجزء الباقى عن كل من ء حـ ، ء أ

الحل

باختيار الاتجاهين المتعامدين ء س ، ء ص كما بالشكل التالى و ذلك باعتبار نقطة ء نقطة الأصل

، ∵ الكتل تتناسب مع المساحات

، ∵ مساحة المربع : مساحة القرص

= ٨ × ٨ : ٤ π = ١٦ : π

∴ نفرض أن : كتلة المربع = ١٦ك ، و تؤثر عند م (٤ ، ٤) ،

كتلة القرص = π ك ، و تؤثر عند م١ (٥ ، ٥)

حيث : م١ يبعد ٣ سم عن كل من أب ، ب حـ

أى : يبعد ٥ سم عن كل من ء أ ، ء حـ

فتكون الكتل و احداثياتها كما بالجدول التالى :

الكتلة	١٦ ك	− π ك
س	٤	٥
ص	٤	٥

∴ س‍م = (١٦ك × ٤ − π ك × ٥) / (١٦ك − π ك) = ٣,٧٦

، ص‍م = (١٦ك × ٤ − π ك × ٥) / (١٦ك − π ك) = ٣,٧٦

∴ مركز ثقل الجزء المتبقى هو (٣,٧٦ ، ٣,٧٦) بالنسبة لنقطة ء

أى أن : مركز ثقل الجزء المتبقى يبعد ٣,٧٦ سم عن كل من ء أ ، ء حـ

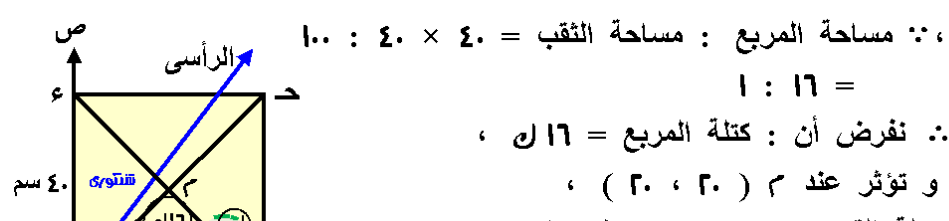
(٢٠) صفيحة رقيقة منتظمة محدودة بالمربع أ ب حـ ء الذى طول ضلعه ٤٠ سم ، ثُقبت ثقباً دائرياً مساحته ٤٠ سم[٢] ، و مركزه عند نقطة عند نقطة على القطر ب ء و تقسمه من الداخل بنسبة ١ : ٤ من ناحية ب ، ثم علقت تعليقاً حراً من الرأس أ ، عين قياس زاوية ميل الضلع أب على الرأسى فى وضع الاتزان

الحل

باختيار الاتجاهين المتعامدين أ س ، أ ص

كما بالشكل التالى و ذلك باعتبار نقطة أ نقطة الأصل

، ∵ الكتل تتناسب مع المساحات



∵، مساحة المربع : مساحة الثقب = ٤٠ × ٤٠ : ١٠٠

= ١٦ : ١

∴ نفرض أن : كتلة المربع = ١٦ ك ،

و تؤثر عند م (٢٠ ، ٢٠) ،

كتلة القرص = ك ، و تؤثر عند $م_١$ (٣٢ ، ٨)

حيث : ∵ $م_١$ ب : $م_١$ ء = ١ : ٤

∴ $م_١$ ب : ء ب = ١ : ٥

، ∵ △ أ ب ء ~ △ ن ب $م_١$ ∴ ن ب : أ ب = ١ : ٥

∴ ن ب = $\frac{١}{٥}$ أ ب = $\frac{١}{٥}$ × ٤٠ = ٨ سم ∴ أ ن = ٣٢ سم

، $م_١$ ن = $\frac{١}{٥}$ أ ء = $\frac{١}{٥}$ × ٤٠ = ٨ سم

فتكون الكتل و احداثياتها كما بالجدول التالى :

الكتلة	١٦ ك	− ك
س	٢٠	٣٢
ص	٢٠	٨

∴ $س_م = \frac{١٦ك \times ٢٠ - ك \times ٣٢}{١٦ك - ك} = ١٩ \frac{١}{٥}$

، $ص_م = \frac{١٦ك \times ٢٠ - ك \times ٨}{١٦ك - ك} = ٢٠ \frac{٤}{٥}$

∴ مركز ثقل الجزء المتبقى هو ($١٩ \frac{١}{٥}$ ، $٢٠ \frac{٤}{٥}$) بالنسبة لنقطة أ

عند التعليق من نقطة أ فإن : طا θ = $٢٠ \frac{٤}{٥} \div ١٩ \frac{١}{٥} = \frac{١٣}{١٢}$

أى أن : قياس الزاوية التى يصنعها $\overline{أ ب}$ مع الرأسى = ٤٧° ١٧´

حل تمارين عامة صفحة ٢١ بالكتاب المدرسى

أولاً : أختر الاجابة الصحيحة من بين الاجابات المعطاة

(١) مركز ثقل ثلاث كتل متساوية قيمة كل واحدة ٢ كجم موضوعة عند رؤوس مثلث قائم الزاوية طولا ضلعى القائمة ٣ سم ، ٤ سم هو ....

(أ) (١ ، $\frac{٤}{٣}$) (ب) (٢ ، $\frac{٣}{٢}$)

(حـ) ($\frac{٤}{٣}$ ، ١) (ء) ($\frac{٣}{٢}$ ، ٢)

ص حـ ٣ سم أ ٤ سم ب س

الحل

∵ الكتل متساوية عند رؤوس المثلث

∴ مركز ثقل المجموعة يؤثر عند نقطة تلاقى متوسطات المثلث

، ∵ أ (٠ ، ٠) ، ب (٤ ، ٠) ، حـ (٠ ، ٣)

∴ م = ((٠ + ٤ + ٠) × $\frac{١}{٣}$ ، (٠ + ٠ + ٣) × $\frac{١}{٣}$) = ($\frac{٤}{٣}$ ، ١)

(٢) مركز ثقل نقطتين ماديتين تفصل بينهما مسافة ثابتة يقع على القطعة المستقيمة الواصلة بينهما و يقسم طولها بنسبة ....

(أ) طردية (ب) عكسية (حـ) عشوائية (ء) ثابتة

الحل

مركز ثقل نقطتين ماديتين تفصل بينهما مسافة ثابتة يقع على القطعة المستقيمة الواصلة بينهما و يقسم طولها بنسبة عكسية

(٣) مركز ثقل النظام التالى : $ك_١$ = ١ كجم عند (٢ ، ٣) ، $ك_٢$ = ٢ كجم عند (-٢ ، ١) ، $ك_٣$ = ٣ كجم عند (٠ ، ١) هو ....

(أ) ($-\frac{١}{٣}$ ، $\frac{٤}{٣}$) (ب) ($\frac{٧}{٦}$ ، $\frac{٤}{٣}$)

(حـ) ($-\frac{١}{٣}$ ، $\frac{٢}{٣}$) (ء) (٠ ، ١)

الحل

$$س_م = \frac{١ × ٢ + ٢ × (−٢) + ٣ × ٠}{١ + ٢ + ٣} = −\frac{١}{٣}$$

، $$ص_م = \frac{١ × ٣ + ٢ × ١ + ٣ × ١}{١ + ٢ + ٣} = \frac{٤}{٣}$$

∴ موضع مركز الثقل هو $(−\frac{١}{٣} ، \frac{٤}{٣})$

(٤) مركز ثقل نظام مؤلف من كتلتين ٦ ث كجم ، ٩ ث كجم بينهما مسافة ١٠ أمتار ، يبعد عن الكتلة الأولى مسافة ....

(أ) ٣ متر (ب) ٤ متر (جـ) ٥ متر (د) ٦ متر

الحل

٦ نيوتن ١٠ متر ٩ نيوتن
$س_م = ٠$ $س_م = ١٠$

باعتبار أن الخط الواصل بين الكتلتين يقع على محور السينات و أن نقطة الأصل تقع عند الكتلة ٦ نيوتن فيكون : $س_م = ٠$

، $س_م = ١٠$ ، $ك_م = ٦$ ، $ك_م = ٩$

∴ $$س_م = \frac{٦ × ٠ + ٩ × ١٠}{٦ + ٩} = ٦$$

أى أن : مركز ثقل الكتلتين الماديين يقع على مسافة ٦ متر من الكتلة الأولى

(٥) بُعد مركز ثقل صفيحة رقيقة منتظمة على شكل مثلث متساوى الأضلاع طول ضلعه ١٢ سم عن أحد رؤوس المثلث يساوى ....

(أ) ٢ $\sqrt{٣}$ سم (ب) ٤ $\sqrt{٣}$ سم

(جـ) ٦ سم (د) ٦ $\sqrt{٣}$ سم

الحل

∵ الصفيحة رقيقة منتظمة على شكل مثلث متساوى الأضلاع

∴ مركز ثقل الصفيحة يؤثر عند نقطة تلاقى متوسطات المثلث

، باعتبار أحد الرؤوس نقطة الأصل (٠ ، ٠) ، يكون الرأس الثانى (١٢ ، ٠)

، الرأس الثالث (٦ ، ١٢ جا ٦٠°) = (٦ ، ٦ $\sqrt{٣}$)

∴ م = ($\frac{١}{٣}$ × (٠ + ١٢ + ٦) ، $\frac{١}{٣}$ × (٠ + ٠ + ٦ $\sqrt{٣}$)) = (٦ ، ٢ $\sqrt{٣}$)

∴ مركز ثقل الصفيحة يبعد عن أحد رؤوس المثلث ٤ $\sqrt{٣}$ سم

(٦) إذا عُلقت صفيحة رقيقة منتظمة على شكل مثلث متساوى الأضلاع بخيط من نقطة على أحد أحرفها تقسمه بنسبة ١ : ٢ فإن قياس زاوية ميل هذا الحرف على الرأسى يساوى ....

(أ) ٢٢,٥° (ب) ٣٠° (جـ) ٤٥° (د) ٦٠°

الحل

∵ الصفيحة رقيقة منتظمة على شكل مثلث متساوى الأضلاع

∴ مركز ثقل الصفيحة يؤثر عند نقطة تلاقى متوسطات المثلث أى عند نقطة م كما بالشكل المقابل

حيث : ء م : م أ = ١ : ٢

، عند التعليق من نقطة هـ ∈ $\overline{أ ب}$

حيث : ب هـ : هـ أ = ١ : ٢

فإن : الرأسى يمر بنقطتى هـ ، م

∴ الرأسى // $\overline{ب جـ}$ ∴ θ = ق (∠ ب) = ٦٠°

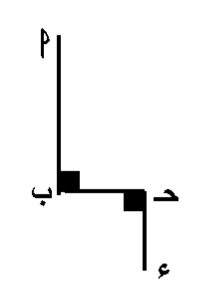
أى أن : قياس زاوية ميل حرف الصفيحة المعلق منها = ٦٠°

(٧) فى الشكل المقابل :

أ ب جـ ء سلك منتظم طوله ٣٢ سم فيه :

أ ب = ٢ ب جـ = ٢ جـ ء = ١٦ سم

فإن : بُعد مركز ثقل السلك عن كل من ، على الترتيب هو ....





(أ) (٣ ، ٣) (ب) (٤ ، ٤)

(حـ) (٣ ، ٥) (ء) (٤ ، ٨)

الحل

باختيار الاتجاهين المتعامدين ب س ، ب ص كما بالشكل المقابل و ذلك باعتبار نقطة ب نقطة الأصل

، ∵ أ ب = ٢ ب حـ = ٢ حـ ء = ١٦ سم

∴ أ ب = ١٦ سم ، ب حـ = حـ ء = ٨ سم

، ∵ السلك منتظم ∴ يمكن اعتباره مكون من ٣ قضبان

أ ب ، ب حـ ، حـ ء ، ∵ الأطوال تتناسب مع الكتل

، أ ب : ب حـ : حـ ء = ٢ : ١ : ١

∴ بفرض أن كتل القضبان بالترتيب هى : ٢ك ، ك ، ك

، و تؤثر فى منتصف كل منها

فتكون الكتل و احداثياتها كما بالجدول التالى :

الكتلة	٢ك	ك	ك
س	٠	٤	٨
ص	٨	٠	– ٤

$$\therefore س_م = \frac{٢ك \times ٠ + ك \times ٤ + ك \times ٨}{٢ك + ك + ك} = ٣$$

$$، ص_م = \frac{٢ك \times ٨ + ك \times ٠ + ك \times (–٤)}{٢ك + ك + ك} = ٣$$

∴ مركز ثقل السلك هو (٣ ، ٣) بالنسبة لنقطة ب

ثانياً أجب عن الأسئلة الآتية :

(٨) أ ب حـ مثلث قائم الزاوية فى ب فيه : أ ب = ٣ سم ، ب حـ = ٤ سم ، وُضعت ثلاث كتل متساوية مقدار كل منها ك عند ب ، نقطة منتصف أ ب ، نقطة منتصف أ حـ أوجد مركز ثقل هذه الكتل الثلاث

الحل

باختيار الاتجاهين المتعامدين ب س ، ب ص كما بالشكل المقابل و ذلك باعتبار نقطة ب نقطة الأصل

من هندسة الشكل : ب (٠ ، ٠) ،

ء (٠ ، ١٫٥) ، هـ (٢ ، ١٫٥)

فتكون الكتل و احداثياتها كما بالجدول التالى :

الكتلة	عند ب	عند ء	عند هـ
	ك	ك	ك
س	٠	٠	٢
ص	٠	١٫٥	١٫٥

$$\therefore س_م = \frac{ك \times ٠ + ك \times ٠ + ك \times ٢}{ك + ك + ك} = \frac{٢}{٣}$$

$$، ص_م = \frac{ك \times ٠ + ك \times ١٫٥ + ك \times ١٫٥}{ك + ك + ك} = ١$$

∴ مركز ثقل الكتل الثلاث هو ($\frac{٢}{٣}$ ، ١) بالنسبة لنقطة ب

حل آخر

∵ الكتل متساوية

∴ مركز ثقلها يقع عند نقطة تلاقى متوسطات المثلث ب ء هـ ، و لتكن م حيث :

$$م = \left(\frac{١}{٣} \times (٠ + ٠ + ٢) ، \frac{١}{٣} \times (٠ + ١٫٥ + ١٫٥) \right)$$

$$= \left(\frac{٢}{٣} ، ١ \right)$$

(٩) صفيحة رقيقة منتظمة الكثافة محدودة بالمثلث أ ب حـ القائم الزاوية فى ب فيه : أ ب = ب حـ = ٩ سم ، إذا فُصل المثلث أ ب م حيث م مركز ثقل الصفيحة و علق الجزء الباقى تعليقاً حراً من النقطة ب فأوجد ظل زاوية ميل ب حـ على الرأسى في وضع التوازن

الحل

باختيار الاتجاهين المتعامدين $\overleftarrow{\text{ب س}}$ ، $\overleftarrow{\text{ب ص}}$ كما بالشكل المقابل و ذلك باعتبار نقطة ب نقطة الأصل ، من هندسة الشكل :

ب (٠ ، ٠) ، حـ (٩ ، ٠) ، م (٠ ، ٩)

، ∵ الصفيحة رقيقة منتظمة على شكل مثلث

∴ مركز ثقلها يقع عند نقطة تلاقى متوسطات المثلث م ب حـ

، و لتكن م حيث :

م = ($\frac{١}{٣}$ × (٠ + ٠ + ٩) ،

$\frac{١}{٣}$ × (٩ + ٠ + ٠)) = (٣ ، ٣)

∴ م و = م هـ = ٣ سم

، مركز ثقل المثلث م ب م يقع عند نقطة تلاقى متوسطاته و لتكن $م_١$ حيث :

$م_١$ = ($\frac{١}{٣}$ × (٠ + ٠ + ٣) ، $\frac{١}{٣}$ × (٩ + ٠ + ٣)) = (١ ، ٤)

، ∵ مساحة △ م ب حـ : مساحة △ م ب م =

$\frac{١}{٢}$ × ٩ × ٩ : $\frac{١}{٢}$ × ٩ × ٣ = ٣ : ١ ، ∵ المساحات متناسبة

∴ نفرض أن كتلة △ م ب حـ هى : ٣ ل ، كتلة △ م ب م هى : ل

فتكون الكتل و احداثياتها كما بالجدول التالى :

الكتلة	٣ ل	– ل
س	٣	١
ص	٣	٤

∴ $س_م = \frac{٣ل × ٣ - ل × ١}{٣ل - ل} = ٤$

، $ص_م = \frac{٣ل × ٣ - ل × ٤}{٣ل - ل} = ٢,٥$

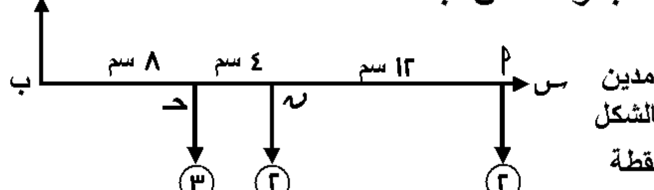
∴ مركز ثقل الجزء المتبقى هو (٤ ، ٢,٥) بالنسبة لنقطة ب

عند التعليق من نقطة ب فإن : طا θ = ٢,٥ ÷ ٤ = $\frac{٥}{٨}$

أى أن : ظل زاوية ميل $\overline{\text{ب حـ}}$ على الرأسى = $\frac{٥}{٨}$

(١٠) قضيب منتظم طوله ٢٤ سم و كتلته ٢ كجم ، ثُبتت كتلة مقدارها ٢ كجم عند نقطة م ، و ثُبتت كتلة أخرى مقدارها ٣ كجم عند نقطة حـ واقعة على القضيب و تبعد ٨ سم عن نقطة ب أوجد مركز ثقل المجموعة عن ب

الحل



باختيار الاتجاهين المتعامدين $\overleftarrow{\text{ب س}}$ ، $\overleftarrow{\text{ب ص}}$ كما بالشكل المقابل و ذلك باعتبار نقطة ب نقطة الأصل

و نكون جدول الأوزان و احداثياتها كما يلى :

	م	حـ	ن
الكتلة	٢	٣	٢
س	٢٤	٨	١٢

∴ $س_م = \frac{٢ × ٢٤ + ٣ × ٨ + ٢ × ١٢}{٢ + ٣ + ٢}$

= $١٣ \frac{٥}{٧}$ سم

أى أن : مركز ثقل القضيب يبعد عن ب مسافة : $١٣ \frac{٥}{٧}$ سم

(١١) م ب حـ ء مربع طول ضلعه ٤ سم ، ثُبتت الكتل ٦ ، ٤ ، ٣ ، ٢ جم عند م ، ب ، حـ ، ء على الترتيب ، كما ثُبتت كتلة مقدارها ١٠ جم عند منتصف $\overline{\text{م ب}}$ عين بعد مركز ثقل المجموعة عن كل من : $\overline{\text{حـ ء}}$ ، $\overline{\text{حـ ب}}$

الحل

نختار اتجاهين متعامدين $\overleftarrow{\text{حـ س}}$ ، $\overleftarrow{\text{حـ ص}}$ كما بالشكل المقابل و ذلك باعتبار نقطة حـ نقطة الأصل

	م	ب	حـ	ء	هـ
الوزن	٦	٤	٣	٢	١٠
س	٤	٤	٠	٠	٤
ص	٤	٠	٠	٤	٢

$$\therefore \text{س}_م = \frac{٦ \times ٤ + ٤ \times ٤ + ٣ \times ٠ + ٢ \times ٠ + ١٠ \times ٤}{٦ + ٤ + ٣ + ٢ + ١٠} = ٣,٢$$

$$، \text{ص}_م = \frac{٦ \times ٤ + ٤ \times ٠ + ٣ \times ٠ + ٢ \times ٤ + ١٠ \times ٢}{٦ + ٤ + ٣ + ٢ + ١٠} = ٢,٠٨$$

∴ مركز ثقل الجزء المتبقى هو (٣,٢ ، ٢,٠٨) بالنسبة لنقطة حـ

أى يبعد عن كل من $\overline{\text{حـ ب}}$ ، $\overline{\text{حـ ء}}$ مسافة : ٣,٢ سم ، ٢,٠٨ سم على الترتيب

(١٢) سلك رفيع منتظم السمك و الكثافة ثُنى على شكل مثلث أ ب حـ قائم الزاوية فى ب فيه : أ ب = ٣ سم ، ب حـ = ٤ سم ، أوجد بعد مركز ثقل السلك عن كل من $\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{ب حـ}}$ ثم أوجد بعده عن ب

الحل

باختيار الاتجاهين المتعامدين $\overleftarrow{\text{ب س}}$ ، $\overleftarrow{\text{ب ص}}$ كما بالشكل المقابل و ذلك باعتبار نقطة ب نقطة الأصل

، من هندسة الشكل : أ حـ = ٥ سم

، ∵ السلك منتظم ∴ يمكن اعتباره مكون من ٣ قضبان $\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{ب حـ}}$ ، $\overline{\text{حـ أ}}$

، ∵ الأطوال تتناسب مع الكتل

، أ ب : ب حـ : حـ أ = ٣ : ٤ : ٥

∴ بفرض أن كتل القضبان بالترتيب هى : ٣ ك ، ٤ ك ، ٥ ك

، و تؤثر فى منتصف كل منها

فتكون الكتل و احداثياتها كما بالجدول التالى :

الكتلة	٣ ك	٤ ك	٥ ك
س	٠	٢	٢
ص	١,٥	٠	١,٥

$$\therefore \text{س}_م = \frac{٣ك \times ٠ + ٤ك \times ٢ + ٥ك \times ٢}{٣ك + ٤ك + ٥ك} = \frac{٣}{٢}$$

$$، \text{ص}_م = \frac{٣ك \times ١,٥ + ٤ك \times ٠ + ٥ك \times ١,٥}{٣ك + ٤ك + ٥ك} = ١$$

∴ مركز ثقل السلك هو ($\frac{٣}{٢}$ ، ١) بالنسبة لنقطة ب

أى يبعد عن كل من $\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{حـ ب}}$ مسافة : ١ ، $\frac{٣}{٢}$ سم على الترتيب

$$، \because (\text{ب م})^٢ = (\frac{٣}{٢})^٢ + (١)^٢ = ٧٥$$

∴ بُعد مركز الثقل عن نقطة ب = $\frac{١}{٢}\sqrt{١٣}$ سم

(١٣) سلك رفيع منتظم السمك و الكثافة طوله ٤٠ سم ثنى على شكل شبه منحرف فيه أ ب = ١٦ سم ، حـ ء = ٨ سم ، ء أ = ٦ سم ، ق (∠ ء أ ب) = ق (∠ حـ ء أ) = ٩٠° ، أوجد بعد مركز ثقل السلك عن الضلعين $\overline{\text{أ ء}}$ ، $\overline{\text{أ ب}}$ ، و إذا علق السلك تعليقاً حراً من أ فأوجد ظل الزاوية التى يصنعها $\overline{\text{أ ب}}$ مع الرأسى فى وضع التوازن

الحل

باختيار الاتجاهين المتعامدين $\overleftarrow{\text{أ س}}$ ، $\overleftarrow{\text{أ ص}}$ كما بالشكل المقابل و ذلك باعتبار نقطة أ نقطة الأصل

من هندسة الشكل : ب حـ = ١٠ سم

∵ السلك رفيع منتظم السمك و الكثافة

∴ يمكن اعتباره مكون من ٤ قضبان منتظمة هى : $\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{ب حـ}}$ ، $\overline{\text{حـ ء}}$ ، $\overline{\text{ء أ}}$

حيث : أ ب = ١٦ سم ، ب حـ = ١٠ سم ، حـ ء = ٨ سم ، ء أ = ٦ سم ، ∵ الكتل تتناسب مع الأطوال

بفرض أن : كتل هذه القضبان هى : ١٦ ك ، ١٠ ك ، ٨ ك ، ٦ ك على الترتيب

و كل منها تؤثر عند منتصفه حيث احداثيات نقط المنتصفات هى على الترتيب :

و يكون جدول الاحداثيات كما يلى :

الكتلة	١٦ ك	١٠ ك	٨ ك	٦ ك
س	٨	١٢	٤	٠
ص	٠	٣	٦	٣

$$\therefore \text{س}_م = \frac{١٦ك \times ٨ + ١٠ك \times ١٢ + ٨ك \times ٤ + ٦ك \times ٠}{٤٠ك} = ٧$$

$$، \text{ص}_م = \frac{١٦ك \times ٠ + ١٠ك \times ٣ + ٨ك \times ٦ + ٦ك \times ٣}{٤٠ك} = ٢,٤$$

∴ احداثى مركز ثقل السلك = (٧ ، ٢,٤)

أى يبعد عن $\overline{\text{أ ب}}$ مسافة ٧ سم ، عن $\overline{\text{أ ء}}$ مسافة ٢,٤ سم

عند التعليق من أ يكون : طا θ = ٢,٤ ÷ ٧ = $\frac{٢٤}{٧٠}$ = $\frac{١٢}{٣٥}$

أى أن : ظل الزاوية التى يصنعها $\overline{\text{أ ب}}$ مع الرأسى فى وضع التوازن = $\frac{١٢}{٣٥}$

(١٤) صفيحة رقيقة منتظمة السمك و الكثافة على شكل شبه منحرف فيه ق (∠ أ) = ق (∠ ء) = ٩٠° ، حـ ء = ٤٠ سم ، أ ء = ٦٠ سم ، أ ب = ١٢٠ سم ، عين مركز ثقل الصفيحة عن كل من : $\overline{\text{أ ء}}$ ، $\overline{\text{أ ب}}$

الحل

نرسم $\overline{\text{حـ هـ}}$ ⊥ $\overline{\text{أ ب}}$

نعتبر الصفيحة مكونة من جزئين هما :

الصفيحة المستطيلة أ هـ حـ ء مركز ثقلها $م_١$ ،

الصفيحة المثلثة هـ حـ ب مركز ثقلها $م_٢$

∵ مساحة المستطيل أ هـ حـ ء : مساحة المثلث هـ حـ ب = ٦٠ × ٤٠ : $\frac{١}{٢}$ × ٨٠ × ٦٠ = ١ : ١

، الصفيحة رقيقة منتظمة الكثافة ∴ المساحات تتناسب مع الكتل

بفرض أن : كتلة المستطيل أ هـ حـ ء = ك ، كتلة المثلث هـ حـ ب = ك

، ∵ الاتجاهين $\overrightarrow{\text{أ ب}}$ ، $\overrightarrow{\text{أ ء}}$ متعامدين و تكون احداثيات النقط هى :

أ (٠ ، ٠) ، هـ (٤٠ ، ٠) ، ب (١٢٠ ، ٠) ، حـ (٤٠ ، ٦٠) ، ء (٠ ، ٦٠)

∴ كتلة الصفيحة المستطيلة أ هـ حـ ء تؤثر عند نقطة تلاقى قطريه $م_١$ (٢٠ ، ٣٠)

، كتلة الصفيحة المثلثة هـ حـ ب تؤثر عند نقطة تلاقى متوسطاته $م_٢$ حيث :

$م_٢$ = ($\frac{١}{٣}$ (٤٠ + ١٢٠ + ٤٠) ، $\frac{١}{٣}$ (٠ + ٠ + ٦٠)) = ($٦٦\frac{٢}{٣}$ ، ٢٠)

و يكون جدول الاحداثيات كما يلى :

الكتلة	ك	ك
س	٢٠	٣٠
ص	$\frac{٢٠٠}{٣}$	٢٠

∴ $س_م$ = $\frac{\text{ك} \times ٢٠ + \text{ك} \times ٦٦\frac{٢}{٣}}{٢\text{ك}}$ = $\frac{١٣٠}{٣}$

، $ص_م$ = $\frac{\text{ك} \times ٣٠ + \text{ك} \times ٢٠}{٢\text{ك}}$ = ٢٥

∴ احداثى مركز ثقل الصفيحة = ($\frac{١٣٠}{٣}$ ، ٢٥)

أى يبعد عن $\overline{\text{أ ب}}$ مسافة $\frac{١٣٠}{٣}$ سم ، عن $\overline{\text{أ ء}}$ مسافة ٢٥ سم

(١٥) سلك رفيع منتظم السمك و الكثافة طوله ١٢٠ سم و كتلته ٦٠٠ جم ثُنى على شكل مثلث أ ب حـ قائم الزاوية فى ب فيه : أ ب = ٣٠ سم ، إذا ثُبتت كتلة ك جم عند الرأس أ ، ثم عُلق السلك تعليقاً حراً من الرأس ب فأتزن عندما كانت $\overline{\text{أ حـ}}$ أفقية فأوجد ك

الحل

باختيار الاتجاهين المتعامدين $\overleftarrow{\text{ب س}}$ ، $\overleftarrow{\text{ب ص}}$ كما بالشكل المقابل و ذلك باعتبار نقطة ب نقطة الأصل

، ∵ أ ب = ٣٠ سم ، طول السلك = ١٢٠ سم

∴ ب حـ + أ حـ = ٩٠ سم

، بفرض أن : ب حـ = ل سم

∴ أ حـ = (٩٠ − ل) سم

، ∵ مثلث أ ب حـ قائم الزاوية فى ب

∴ $(٩٠ - \text{ل})^٢ = \text{ل}^٢ + ٩٠٠$ ، و منها : ل = ٤٠ سم

∴ أ حـ = ٥٠ سم ، ب حـ = ٤٠ سم

، ∵ السلك منتظم ∴ يمكن اعتباره مكون من ٣ قضبان $\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{ب حـ}}$ ، $\overline{\text{حـ أ}}$

، ∵ الأطوال تتناسب مع الكتل ، أ ب : ب حـ : حـ أ = ٣ : ٤ : ٥

، كتلة السلك = ٦٠٠ جم ، مجموع الأجزاء = ١٢

∴ قيمة الجزء = $\frac{٦٠٠}{١٢}$ = ٥٠

∴ بفرض أن كتل القضبان بالترتيب هى : ١٥٠ ، ٢٠٠ ، ٢٥٠ ، و تؤثر فى منتصف كل منها ، فتكون الكتل و احداثياتها كما بالجدول المقابل :

الكتلة	١٥٠	٢٠٠	٢٥٠	ك
س	٠	٢٠	٢٠	٠
ص	١٥	٠	١٥	٣٠

$$\therefore \text{س}_{ن} = \frac{١٥٠ \times ٠ + ٢٠٠ \times ٢٠ + ٢٥٠ \times ٢٠ + \text{ك} \times ٠}{١٥٠ + ٢٠٠ + ٢٥٠ + \text{ك}} = \frac{٩٠٠٠}{٦٠٠ + \text{ك}}$$

$$، \text{ص}_{ن} = \frac{١٥٠ \times ١٥ + ٢٠٠ \times ٠ + ٢٥٠ \times ١٥ + \text{ك} \times ٣٠}{١٥٠ + ٢٠٠ + ٢٥٠ + \text{ك}} = \frac{٦٠٠٠ + ٣٠\text{ك}}{٦٠٠ + \text{ك}}$$

، ∵ $\overline{\text{أجـ}}$ أفقى ∴ الرأسى $\overline{\text{ب ن}}$ عمودى عليه

، من هندسة الشكل : أ ب × ب جـ = أ جـ × ب ن

∴ ٣٠ × ٤٠ = ٥٠ × ب ن ، و منها : ب ن = ٢٤ سم ،

$(\text{ب جـ})^2$ = أ جـ × جـ ن ∴ ١٦٠٠ = ٥٠ × ب ن ، و منها : جـ ن = ٢٤ سم

$$\therefore \text{ظا}\,\theta = \frac{٣٢}{٢٤} = \frac{٤}{٣} \quad \therefore \frac{٦٠٠٠ + ٣٠\text{ك}}{٦٠٠ + \text{ك}} \times \frac{٦٠٠ + \text{ك}}{٩٠٠٠} = \frac{٤}{٣}$$

∴ ١٨٠٠٠ + ٩٠ ك = ٣٦٠٠٠ ، و منها : ك = ٢٠٠ جم

(١٦) صفيحة رقيقة منتظمة السمك و الكثافة على شكل قرص دائرى مركزه نقطة الأصل و طول نصف قطره ٢٤ سم ، قُطع منه قرصان دائريان مركز أحدهما (−٢ ، −١٢) ، و طول نصف قطره ٤ سم ، و مركز الآخر (٦ ، ١٠) ، و طول نصف قطره ١٢ سم ، عين مركز ثقل الجزء الباقى من القرص

الحل

∵ الكتل تتناسب مع المساحات

، ∵ مساحة القرص م : مساحة القرص م_1 : مساحة القرص م_2

$= ٥٧٦\pi : ١٦\pi : ١٤٤\pi = ٣٦ : ٩ : ١$

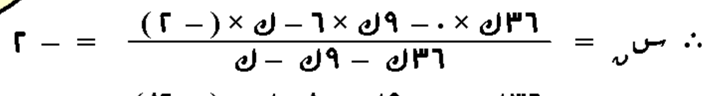
∴ نفرض أن : كتلة القرص م = ٣٦ ك

، كتلة القرص م_1 = ٩ ك ، كتلة القرص م_2 = ك

و باختيار الاتجاهين المتعامدين $\overrightarrow{\text{م س}}$ ، $\overrightarrow{\text{م ص}}$

، و يكون جدول الكتل و الاحداثيات كما يلى :

الكتلة	٣٦ ك	− ٩ ك	− ك
س	٠	٦	− ٢
ص	٠	١٠	− ١٢



$$\therefore \text{س}_{ن} = \frac{٣٦\text{ك} \times ٠ - ٩\text{ك} \times ٦ - \text{ك} \times (-٢)}{٣٦\text{ك} - ٩\text{ك} - \text{ك}} = -٢$$

$$، \text{ص}_{ن} = \frac{٣٦\text{ك} \times ٠ - ٩\text{ك} \times ١٠ - \text{ك} \times (-١٢)}{٣٦\text{ك} - ٩\text{ك} - \text{ك}} = -٣$$

∴ مركز ثقل الجزء الباقى هو : (−٢ ، −٣) بالنسبة لنقطة الأصل م

(١٧) أ ب جـ ء صفيحة رقيقة منتظمة على شكل مستطيل فيه : أ ب = ٤٠ سم ، ب جـ = ٦٠ سم ، تقاطع قطريه فى م ، قُطع المثلث ب جـ م هـ ء ثُم عُلق الباقى تعليقاً حراً من الرأس جـ ، عين ظل زاوية ميل $\overline{\text{جـ ب}}$ على الرأسى فى وضع الاتزان

الحل

نختار اتجاهين متعامدين $\overrightarrow{\text{جـ س}}$ ، $\overrightarrow{\text{جـ ص}}$ كما بالشكل المقابل و ذلك باعتبار نقطة جـ نقطة الأصل

∵ مساحة المثلث م ب جـ : مساحة المستطيل أ ب جـ ء

$= \frac{1}{2} \times ٦٠ \times ٢٠ : ٦٠ \times ٤٠$

$= ١ : ٤$

، ∵ الصفيحة منتظمة الكثافة ∴ المساحات تتناسب مع الكتل

بفرض أن كتلة المثلث م ب جـ = ك ، تؤثر فى م_2 حيث :

$$\text{م}_2 = \left(\tfrac{1}{3}(٣٠ + ٦٠ + ٠) ، \tfrac{1}{3}(٢٠ + ٠ + ٠) \right) = \left(٣٠ ، \tfrac{٢٠}{٣} \right)$$

، كتلة المستطيل ⍴ ب حـ ء = ٤ ك ، تؤثر فى م (٣٠ ، ٢٠)

و يكون جدول الكتل و الاحداثيات كما يلى :

الكتلة	٤ ك	– ك
س	٣٠	٢٠
ص	٣٠	$\frac{٢٠}{٣}$

$$\therefore \text{س}_{م} = \frac{٤ك \times ٣٠ - ك \times ٢٠}{٤ك - ك} = ٣٠$$

$$، \text{ص}_{م} = \frac{٤ك \times ٣٠ - ك \times \frac{٢٠}{٣}}{٤ك - ك} = ٢٤\frac{٤}{٩}$$

∴ موضع مركز الثقل هو = (٣٠ ، $٢٤\frac{٤}{٩}$) بالنسبة لنقطة حـ

عند التعليق من حـ يكون : طا $\theta = ٢٤\frac{٤}{٩} \div ٣٠ = \frac{٢٢}{٢٧}$

∴ ظل زاوية ميل $\overline{\text{حـ ب}}$ على الرأسى = $\frac{٢٢}{٢٧}$

(١٨) ⍴ ب حـ ء صفيحة رقيقة منتظمة على شكل مربع طول ضلعه ٤٨ سم و كتلتها ٤٠ جم ، النقطتان ل ، م منتصفا $\overline{⍴\text{ب}}$ ، $\overline{⍴\text{ء}}$ على الترتيب قُطع المثلث ⍴ ل م ثم ثُبتت عند كل من حـ ، ء كتلة تساوى كتلة المثلث المقطوع ، و ثُبتت عند ب كتلة نساوى ضعف كتلة المثث المقطوع ، فإذا عُلقت المجموعة تعليقاً حراً من النقطة حـ ، أوجد ظل زاوية ميل $\overline{\text{ب حـ}}$ على الرأسى فى وضع الاتزان

الحلـــ

نختار اتجاهين متعامدين $\overleftarrow{\text{حـ س}}$ ، $\overleftarrow{\text{حـ ص}}$ كما بالشكل المقابل و ذلك باعتبار نقطة حـ نقطة الأصل

∵ مساحة المثلث ⍴ ل م : مساحة المربع ⍴ ب حـ ء

$= \frac{١}{٢} \times ٢٤ \times ٢٤ : ٤٨ \times ٤٨$

$= ١ : ٨$ ، ∵ الصفيحة منتظمة الكثافة

∴ المساحات تتناسب مع الكتل

، ∵ كتلة المربع ⍴ ب حـ ء " $ك_١$ " = ٤٠ جم ، و تؤثر فى $م_١$

∴ كتلة المثلث ⍴ ل م " $ك_٢$ " = ٥ جم ، و تؤثر فى $م_٢$ حيث :

$م_٢ = \left(\frac{١}{٣}(٤٨ + ٤٨ + ٢٤) ، \frac{١}{٣}(٤٨ + ٢٤ + ٤٨) \right) = (٤٠ ، ٤٠)$

، و يكون جدول الكتل و الاحداثيات كما يلى :

	$ك_١$	$ك_٢$	عند ب	عند حـ	عند ء
الكتلة	٤٠ ك	– ٥	١٠	٥	٥
س	٢٤	٤٠	٤٨	٠	٠
ص	٢٤	٤٠	٠	٠	٤٨

$$\therefore \text{س}_{م} = \frac{٤٠ \times ٢٤ - ٥ \times ٤٠ + ١٠ \times ٤٨ + ٥ \times ٠ + ٥ \times ٠}{٤٠ - ٥ + ١٠ + ٥ + ٥} = \frac{٢٤٨}{١١}$$

$$، \text{ص}_{م} = \frac{٤٠ \times ٢٤ - ٥ \times ٤٠ + ١٠ \times ٠ + ٥ \times ٠ + ٥ \times ٤٨}{٤٠ - ٥ + ١٠ + ٥ + ٥} = \frac{٢٠٠}{١١}$$

∴ مركز ثقل الجزء الباقى هو : ($\frac{٢٤٨}{١١}$ ، $\frac{٢٠٠}{١١}$) بالنسبة لنقطة الأصل حـ

عند التعليق من حـ يكون : طا $\theta = \frac{٢٤٨}{١١} \div \frac{٢٠٠}{١١} = \frac{٢٥}{٣١}$

أى أن : ظل الزاوية التى يصنعها $\overline{\text{ب حـ}}$ مع الرأسى فى وضع التوازن = $\frac{٢٥}{٣١}$

(١٩) ⍴ ب حـ صفيحة رقيقة منتظمة السمك و الكثافة على هيئة مثلث قائم الزاوية فى ب حيث : ⍴ ب = ١٢ سم ، ب حـ = ٢٠ سم ، و كانت س ، ص ، ع منتصفات $\overline{⍴\text{ب}}$ ، $\overline{\text{ب حـ}}$ ، $\overline{\text{حـ} ⍴}$ على الترتيب ، قُطع المثلث حـ ص ع و طُبق على المثلث ص ب س فإذا عُلقت المجموعة تعليقاً حراً من النقطة ب ، أوجد ظل زاوية ميل $\overline{\text{ب حـ}}$ على الرأسى فى وضع الاتزان

الحلـــ

باختيار الاتجاهين المتعامدين $\overleftarrow{\text{ب حـ}}$ ، $\overleftarrow{\text{ب} ⍴}$ كما بالشكل المقابل و ذلك باعتبار نقطة ب نقطة الأصل

، ∵ مساحة المثلث أ ب حـ : مساحة المثلث ص ب س : مساحة المثلث حـ ص ع

$= \frac{١}{٢} \times ٢٠ \times ١٢ : \frac{١}{٢} \times ١٠ \times ٦ : \frac{١}{٢} \times ١٠ \times ٦ = ٤ : ١ : ١$

، الصفيحة منتظمة الكثافة ∴ المساحات تتناسب مع الكتل

بفرض أن كتلة المثلث أ ب حـ = ٤ ك ، تؤثر في $م_١$ حيث :

$م_١ = \left(\frac{١}{٣}(٠ + ٠ + ٢٠) ، \frac{١}{٣}(١٢ + ٠ + ٠) \right) = \left(\frac{٢٠}{٣} ، ٤ \right)$

، كتلة المثلث ص ب س = ك ، تؤثر في $م_٢$ حيث :

$م_٢ = \left(\frac{١}{٣}(١٠ + ٠ + ٠) ، \frac{١}{٣}(٠ + ٠ + ٦) \right) = \left(\frac{١٠}{٣} ، ٢ \right)$

، كتلة المثلث حـ ص ع = ك ، تؤثر في $م_٣$ حيث :

$م_٣ = \left(\frac{١}{٣}(٢٠ + ١٠ + ١٠) ، \frac{١}{٣}(٠ + ٠ + ٦) \right) = \left(\frac{٤٠}{٣} ، ٢ \right)$

، و يكون جدول الكتل و الاحداثيات كما يلي :

الكتلة	٤ ك	ك	− ك
س	$\frac{٢٠}{٣}$	$\frac{١٠}{٣}$	$\frac{٤٠}{٣}$
ص	٤	٢	٢

$∴ س_م = \frac{٤ك \times \frac{٢٠}{٣} + ك \times \frac{١٠}{٣} - ك \times \frac{٤٠}{٣}}{٤ك + ك - ك} = \frac{٢٥}{٦}$

$، ص_م = \frac{٤ك \times ٤ + ك \times ٢ - ك \times ٢}{٤ك + ك - ك} = ٤$

∴ مركز ثقل المجموعة هو : $\left(\frac{٢٥}{٦} ، ٤ \right)$ بالنسبة لنقطة الأصل ب

عند التعليق من ب يكون : $ظا\ \theta = ٤ \div \frac{٢٥}{٦} = \frac{٢٤}{٢٥}$

أي أن : ظل الزاوية التي يصنعها $\overline{\text{ب حـ}}$ مع الرأسي في وضع التوازن $= \frac{٢٤}{٢٥}$

حل آخر " لإيجاد مركز الثقل "

باعتبار نقطة ب نقطة الأصل كما بالشكل المقابل ،

بفرض أن كتلة الصفيحة = ٤ ك ،

في الوضع الجديد تصبح الصفيحة مكونة من

الصفيحة المثلثة ص ب س (مكونة من طبقتين)

فتكون كتلتها = ٢ ك ، تؤثر في $م_١$ حيث :

$م_١ = \left(\frac{١}{٣}(١٠ + ٠ + ٠) ، \frac{١}{٣}(٠ + ٠ + ٦) \right) = \left(\frac{١٠}{٣} ، ٢ \right)$ ،

الصفيحة المثلثة ص ع س ، و كتلتها = ك ، تؤثر في $م_٢$ حيث :

$م_٢ = \left(\frac{١}{٣}(١٠ + ١٠ + ٠) ، \frac{١}{٣}(٠ + ٦ + ٦) \right) = \left(\frac{٢٠}{٣} ، ٤ \right)$ ،

الصفيحة المثلثة أ ع س ، و كتلتها = ك ، تؤثر في $م_٣$ حيث :

$م_٣ = \left(\frac{١}{٣}(٠ + ١٠ + ٠) ، \frac{١}{٣}(١٢ + ٦ + ٦) \right) = \left(\frac{١٠}{٣} ، ٨ \right)$ ،

، و يكون جدول الكتل و الاحداثيات كما يلي :

الكتلة	٢ ك	ك	ك
س	$\frac{١٠}{٣}$	$\frac{٢٠}{٣}$	$\frac{١٠}{٣}$
ص	٢	٤	٨

$∴ س_م = \frac{٢ك \times \frac{١٠}{٣} + ك \times \frac{٢٠}{٣} + ك \times \frac{١٠}{٣}}{٢ك + ك + ك} = \frac{٢٥}{٦}$

$، ص_م = \frac{٢ك \times ٢ + ك \times ٤ + ك \times ٨}{٢ك + ك + ك} = ٤$

∴ مركز ثقل المجموعة هو : $\left(\frac{٢٥}{٦} ، ٤ \right)$ بالنسبة لنقطة الأصل ب

(٢٠) صفيحة رقيقة منتظمة السمك و الكثافة على شكل مثلث أ ب حـ المتساوي الساقين حيث : أ ب = أ حـ = ٢٦ سم ، ب حـ = ٢٠ سم

رُسم $\overrightarrow{\text{أ ء}} \perp \overline{\text{ب حـ}}$ و يقطع $\overline{\text{ب حـ}}$ في ء ، فإذا كانت هـ منتصف $\overline{\text{أ ء}}$ و فُصل المثلث هـ ب حـ ، أوجد بُعد مركز ثقل الجزء الباقي عن نقطة هـ

الحل

نختار اتجاهين متعامدين $\overrightarrow{\text{حـ س}}$ ، $\overrightarrow{\text{حـ ص}}$ كما بالشكل المقابل و ذلك باعتبار نقطة حـ نقطة الأصل

من هندسة الشكل :

أ ء = ٢٤ سم ، ء هـ = ١٢ سم ،

مساحة المثلث أ ب حـ : مساحة المثلث هـ ب حـ

= ٢ : ١

أحمد الشنتوري

، ∵ الصفيحة منتظمة الكثافة ∴ المساحات تتناسب مع الكتل

، بفرض أن كتلة المثلث أ ب حـ = ٢ ك ، تؤثر فى م$_1$ حيث :

م$_1$ = ($\frac{١}{٣}$ (١٠ + ٢٠ + ٠) ، $\frac{١}{٣}$ (٢٤ + ٠ + ٠)) = (١٠ ، ٨)

، كتلة المثلث هـ ب حـ = ك ، تؤثر فى م$_2$ حيث :

م$_2$ = ($\frac{١}{٣}$ (١٠ + ٢٠ + ٠) ، $\frac{١}{٣}$ (١٢ + ٠ + ٠)) = (١٠ ، ٤)

، و يكون جدول الكتل و الاحداثيات كما يلى :

الكتلة	٢ ك	– ك
س	١٠	١٠
ص	٨	٤

∴ سَ = $\frac{٢ك \times ١٠ - ك \times ١٠}{٢ك - ك}$ = ١٠

، صَ = $\frac{٢ك \times ٨ - ك \times ٤}{٢ك - ك}$ = ١٢

∴ مركز ثقل الجزء الباقى هو : (١٠ ، ١٢) بالنسبة لنقطة الأصل حـ

أى أن : مركز ثقل الجزء الباقى ينطبق على نقطة هـ

∴ بعد مركز ثقل الجزء الباقى عن النقطة هـ = صفر

(٢١) صفيحة رقيقة منتظمة السمك و الكثافة على شكل مربع أ ب حـ ء طول ضلعه ٤٨ سم ، م نقطة تقاطع قطريه ، قُطع المثلث حـ م ء ثم لُصق على المثلث حـ م ب بحيث انطبق $\overline{م ء}$ على $\overline{م ب}$ ، أوجد بُعد مركز ثقل الصفيحة عن كل من $\overline{أ ب}$ ، $\overline{ب حـ}$

الحل

باختيار الاتجاهين المتعامدين $\overleftarrow{ب س}$ ، $\overleftarrow{ب ص}$ كما بالشكل المقابل و ذلك باعتبار نقطة ب نقطة الأصل

من هندسة الشكل :

مساحة المربع أ ب حـ ء : مساحة المثلث م ب حـ : مساحة المثلث م ء حـ = ٤ : ١ : ١

، بفرض أن كتلة المربع أ ب حـ ء = ٤ ك

، تؤثر فى م حيث : م = (٢٤ ، ٢٤)

، كتلة المثلث م ب حـ = ك ، تؤثر فى م$_1$ حيث :

م$_1$ = ($\frac{١}{٣}$ (٢٤ + ٠ + ٤٨) ، $\frac{١}{٣}$ (٢٤ + ٠ + ٠)) = (٢٤ ، ٨)

، كتلة المثلث م ء حـ = ك ، تؤثر فى م$_2$ حيث :

م$_2$ = ($\frac{١}{٣}$ (٢٤ + ٤٨ + ٤٨) ، $\frac{١}{٣}$ (٢٤ + ٤٨ + ٠)) = (٤٠ ، ٢٤)

، و يكون جدول الكتل و الاحداثيات كما يلى :

الكتلة	٤ ك	ك	– ك
س	٢٤	٢٤	٤٠
ص	٢٤	٨	٢٤

∴ سَ = $\frac{٤ك \times ٢٤ + ك \times ٢٤ - ك \times ٤٠}{٤ك + ك - ك}$ = ٢٠

، صَ = $\frac{٤ك \times ٢٤ + ك \times ٨ - ك \times ٢٤}{٤ك + ك - ك}$ = ٢٠

∴ مركز ثقل المجموعة هو : (٢٠ ، ٢٠) بالنسبة لنقطة الأصل ب

حل آخر

باعتبار نقطة ب نقطة الأصل كما بالشكل المقابل ،

بفرض أن كتلة الصفيحة = ٤ ك ،

فى الوضع الجديد تصبح الصفيحة مكونة من الصفيحة المثلثة م ب حـ (مكونة من طبقتين) فتكون كتلتها = ٢ ك ، تؤثر فى م$_1$ حيث :

م$_1$ = ($\frac{١}{٣}$ (٢٤ + ٠ + ٤٨) ، $\frac{١}{٣}$ (٢٤ + ٠ + ٠)) = (٢٤ ، ٨)

الصفيحة المثلثة م ء أ ، و كتلتها = ك ، تؤثر فى م$_2$ حيث :

م$_2$ = ($\frac{١}{٣}$ (٢٤ + ٤٨ + ٠) ، $\frac{١}{٣}$ (٢٤ + ٤٨ + ٤٨)) = (٢٤ ، ٤٠) ،

الصفيحة المثلثة م ب أ ، و كتلتها = ك ، تؤثر فى م$_3$ حيث :

م$_3$ = ($\frac{١}{٣}$ (٢٤ + ٠ + ٠) ، $\frac{١}{٣}$ (٢٤ + ٠ + ٤٨)) = (٨ ، ٢٤) ،

، و يكون جدول الكتل و الاحداثيات كما يلى :

الكتلة	٢ ك	ك	ك
س	٢٤	٢٤	٨
ص	٨	٤٠	٢٤

∴ $\bar{س} = \frac{٢ك \times ٢٤ + ك \times ٢٤ + ك \times ٨}{٢ك + ك + ك} = ٢٠$

، $\bar{ص} = \frac{٢ك \times ٨ + ك \times ٤٠ + ك \times ٢٤}{٢ك + ك + ك} = ٢٠$

∴ مركز ثقل المجموعة هو : (٢٠ ، ٢٠) بالنسبة لنقطة الأصل ب

(٢٢) صفيحة رقيقة منتظمة السمك و الكثافة على شكل مستطيل أ ب حـ ء مركزه م ، حيث : أ ب = ١٦ سم ، ب حـ = ٢٠ سم ، أُخذت النقطتان هـ ، و على $\overline{أ ب}$ حيث : أ هـ = ب و = ٣ سم ، إذا قُطع المثلث م هـ و ، فأوجد بُعد مركز الثقل عن كل من $\overline{حـ ء}$ ، $\overline{ء أ}$ و إذا عُلق هذا الجزء تعليقاً حراً من ء فأوجد فى وضع التوازن ظل الزاوية التى يصنعها $\overline{ء أ}$ مع الرأسى

الحل

باختيار الاتجاهين المتعامدين $\overleftarrow{ءس}$ ، $\overleftarrow{ءص}$ كما بالشكل المقابل و ذلك باعتبار نقطة ء نقطة الأصل

∵ مساحة المستطيل أ ب حـ ء : مساحة المثلث م و هـ =

٢٠ × ١٦ : $\frac{١}{٢}$ × ١٠ × ١٠ =

٣٢ : ٥

، ∵ الصفيحة منتظمة الكثافة ∴ المساحات تتناسب مع الكتل

، بفرض أن كتلة المستطيل أ ب حـ ء = ٣٢ ك ، تؤثر فى م حيث :

م = (١٠ ، ٨)

، كتلة المثلث م و هـ = ٥ ك ، تؤثر فى $م_١$ حيث :

$م_١ = (\frac{١}{٣} (١٠ + ٢٠ + ٢٠) ، \frac{١}{٣} (٨ + ١٣ + ٣)) = (\frac{٥٠}{٣} ، ٨)$

، و يكون جدول الكتل و الاحداثيات كما يلى :

الكتلة	٣٢ ك	– ٥ ك
س	١٠	$\frac{٥٠}{٣}$
ص	٨	٨

∴ $\bar{س} = \frac{٣٢ك \times ١٠ - ٥ك \times \frac{٥٠}{٣}}{٣٢ك - ٥ك} = \frac{٧١٠}{٨١}$

، $\bar{ص} = \frac{٣٢ك \times ٨ - ٥ك \times ٨}{٣٢ك - ٥ك} = ٨$

∴ مركز ثقل الجزء الباقى هو : ($\frac{٧١٠}{٨١}$ ، ٨) بالنسبة لنقطة الأصل ء

∴ مركز ثقل الجزء الباقى يبعد $\frac{٧١٠}{٨١}$ سم ، ٨ سم عن كل من $\overline{حـ ء}$ ، $\overline{ء أ}$ على الترتيب ، عند التعليق من ء يكون : طا θ = ٨ ÷ $\frac{٧١٠}{٨١}$ = $\frac{٣٥٥}{٣٢٤}$

أى أن : ظل الزاوية التى يصنعها $\overline{ء أ}$ مع الرأسى فى وضع التوازن = $\frac{٣٥٥}{٣٢٤}$

(٢٣) ثُبتت كتل مقاديرها ١٠ ، ٢٠ ، ١٠ ، ٣٠ ، ١٠ ، ٤٠ كجم عند الرؤوس أ ، ب ، حـ ، ء ، هـ ، و على الترتيب لمسدس منتظم طول ضلعه ٣٠ سم ، أوجد بُعد مركز ثقل المجموعة عن مركز المسدس

الحل

كما بالشكل المقابل : نقطة ن (مركز المسدس) نقطة الأصل ، بفرض أن :

من هندسة الشكل :

أ ع = و ع = حـ ى = ء ى = ٣٠ سم ،

أ ع = ٢ ل حا ٦٠° = ٣٠ $\sqrt{٣}$ سم

بالمثل : حـ ع = و ز = ء ز

= ٣٠ $\sqrt{٣}$ سم ،

ب ن = هـ ع = ٦٠ سم

و نكون جدول الأوزان و احداثياتها كما يلى :

٣٧

	ا	ب	حـ	ء	هـ	و
الكتلة	١٠	٢٠	١٠	٣٠	١٠	٤٠
س	٣٠	٦٠	٣٠	− ٣٠	− ٦٠	− ٣٠
ص	$٣٠\sqrt{٣}$	٠	$- ٣٠\sqrt{٣}$	$- ٣٠\sqrt{٣}$	٠	$٣٠\sqrt{٣}$

$$\therefore س_م = \frac{١٠ \times ٣٠ + ٢٠ \times ٦٠ + ١٠ \times ٣٠ + ٣٠ \times (-٣٠) + ١٠ \times (-٦٠) + ٤٠ \times (-٣٠)}{١٠ + ٢٠ + ١٠ + ٣٠ + ١٠ + ٤٠}$$

$= - ٧,٥$ ،

$$ص_م = \frac{١٠ \times ٣٠\sqrt{٣} + ٢٠ \times ٠ + ١٠ \times (-٣٠\sqrt{٣}) + ٣٠ \times (-٣٠\sqrt{٣}) + ١٠ \times ٠ + ٤٠ \times ٣٠\sqrt{٣}}{١٠ + ٢٠ + ١٠ + ٣٠ + ١٠ + ٤٠}$$

$= ٢,٥\sqrt{٣}$

∴ احداثى مركز الثقل = $(- ٧,٥ \text{ ، } ٢,٥\sqrt{٣})$ بالنسبة للنقطة ن

، ∵ $(ن م)^٢ = (- ٧,٥)^٢ + (٢,٥\sqrt{٣})^٢ = ٧٥$

∴ بُعد مركز الثقل عن مركز المسدس = $٥\sqrt{٣}$ سم

(٢٤) صفيحة رقيقة منتظمة السمك و الكثافة على شكل مستطيل ا ب حـ ء الذى فيه : ا ب = ٢٥ سم ، ب حـ = ١٦ سم ، فُرضت نقطة هـ ∈ $\overline{ب حـ}$ ، و ∈ $\overline{ب ا}$ بحيث : ب هـ = ١٠ سم ، ثُم فُصل المثلث ب هـ و ، و وُضعت الصفيحة فى مستوٍ رأسى بحيث انطبق حرفها $\overline{حـ هـ}$ على نضد أفقى أملس فكانت الصفيحة على وشك الدوران أوجد طول $\overline{ب و}$

الحلــ

باختيار الاتجاهين المتعامدين $\overleftarrow{حـ س}$ ، $\overleftarrow{حـ ص}$ كما بالشكل المقابل

و ذلك باعتبار نقطة حـ نقطة الأصل

، بفرض أن : ب و = ل سم

∵ مساحة المستطيل ا ب حـ ء :

مساحة المثلث ب و هـ =

$٢٥ \times ١٦ : \frac{١}{٢} \times ١٠ \times ل = ٨٠ : ل$

، ∵ الصفيحة منتظمة الكثافة

∴ المساحات تتناسب مع الكتل

، بفرض أن كتلة المستطيل ا ب حـ ء

= ٨٠ ك ، تؤثر فى $م_١$ حيث :

$م_١ = (٨ \text{ ، } ١٢,٥)$

، كتلة المثلث ب و هـ = ل ك ، تؤثر فى $م_٢$ حيث :

$م_٢ = (\frac{١}{٣}(١٦ + ١٦ + ٦) \text{ ، } \frac{١}{٣}(٠ + ل + ٠)) = (\frac{٣٨}{٣} \text{ ، } \frac{١}{٣} ل)$

، ∵ الصفيحة فى مستوى رأسى ، $\overline{حـ هـ}$ على نضد أفقى

، الصفيحة على وشك الدوران حول النقطة هـ

∴ (م) مركز ثقل الجزء الباقى يقع على $\overleftarrow{هـ م}$ ، و يكون : $س_م = ٦$

، ∵ $س_م = \frac{٨٠ك \times ٨ - ل ك \times \frac{٣٨}{٣}}{٨٠ك - ل ك}$ ∴ $\frac{٨٠ك \times ٨ - ل ك \times \frac{٣٨}{٣}}{٨٠ك - ل ك} = ٦$

∴ $٦٤٠ - \frac{٣٨}{٣} ل = ٤٨٠ - ٦ ل$ ∴ $\frac{٢٠}{٣} ل = ١٦٠$

و منها : ل = ٢٤ أى أن : ب و = ٢٤ سم

اجابة أسئلة الاختبارات الخاصة بالوحدة

الاختبار الأول

السؤال الأول : أختر الاجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة

(٦) مركز ثقل جسمين ماديين كتل كل منهما ٣ نيوتن ، ٦ نيوتن و المسافة بينهما ١٥ سم يبعد عن الجسم ٣ نيوتن مسافة .... سم

(أ) ٥ (ب) ١٠ (جـ) ٧,٥ (د) ٩

الحل

باعتبار أن الخط الواصل بين الجسمين يقع على محور السينات و أن نقطة الأصل تقع عند الكتلة ٣ نيوتن فيكون : $س_1 = ٠$ ، $س_2 = ١٥$ ، $ك_1 = ٣$ ، $ك_2 = ٦$

$$\therefore س_م = \frac{٣ \times ٠ + ٦ \times ١٥}{٣ + ٦} = ١٠$$

أى أن : مركز ثقل الكتلتين الماديين يقع على مسافة ١٠ متر من الكتلة الأولى

حل آخر

بفرض أن : مركز الثقل يبعد عن الجسم ٣ نيوتن مسافة = س سم

$\therefore$ ٣ س = ٦ × (١٥ − س) $\therefore$ ٣ س = ٩٠ − ٦ س

و منها : س = ١٠ سم

السؤال الرابع :

(٢) أ ب جـ مثلث متساوى الأضلاع طول ضلعه ١٠ سم ، اثرت الأوزان ٣ ، ٦ ، ٩ نيوتن فى رؤوسه ، عين موضع مركز ثقل المجموعة

الحل

نختار اتجاهين متعامدين $\overleftarrow{أس}$ ، $\overleftarrow{أص}$ كما بالشكل المقابل و ذلك باعتبار نقطة أ نقطة أصل و من هندسة الشكل نجد :

جـ ء = ١٠ حا ٦٠° = ٥ $\sqrt{٣}$ سم

فيكون : أ (٠،٠) ، ب (١٠،٠) ، جـ (٥، ٥ $\sqrt{٣}$)

و نكون جدول الأوزان و احداثياتها كما يلى :

	أ	ب	جـ
الوزن	٣	٦	٩
س	٠	١٠	٥
ص	٠	٠	٥ $\sqrt{٣}$

$$\therefore س_م = \frac{٣ \times ٠ + ٦ \times ١٠ + ٩ \times ٥}{٣ + ٦ + ٩} = \frac{٣٥}{٦}$$

$$، ص_م = \frac{٣ \times ٠ + ٦ \times ٠ + ٩ \times ٥\sqrt{٣}}{٣ + ٦ + ٩} = \frac{٥}{٢}\sqrt{٣}$$

$\therefore$ احداثى مركز الثقل = ($\frac{٣٥}{٦}$ ، $\frac{٥}{٢}\sqrt{٣}$) بالنسبة للنقطة أ

السؤال الخامس :

(٢) صفيحة رقيقة منتظمة الكثافة على شكل مستطيل أ ب جـ ء فيه : أ ب = ٥ سم ، ب جـ = ١٢ سم ، هـ $\in \overleftarrow{أء}$ بحيث أ هـ = ٥ سم ثنى المثلث أ ب هـ حول الضلع $\overline{ب هـ}$ حتى أنطبق $\overline{أ ب}$ على $\overline{ب جـ}$ تماماً ، عين موضع مركز ثقل الصفيحة بعد ثنيها بالنسبة إلى : $\overleftarrow{جـ ب}$ ، $\overleftarrow{جـ ء}$

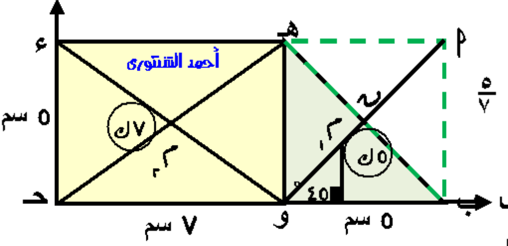
الحل

$$\frac{\text{مساحة المربع أ ب و هـ}}{\text{مساحة المستطيل و جـ ء هـ}} = \frac{٢٥}{٣٥} = \frac{٥}{٧}$$

$\because$ الصفيحة رقيقة منتظمة الكثافة

$\therefore$ المساحات تتناسب مع الكتل

بفرض أن كتلة المربع أ ب و هـ = ٥ ك



∴ كتلة المستطيل و حـ ء هـ = ٧ ك

، ∵ الاتجاهين $\overleftarrow{حـ ب}$ ، $\overleftarrow{حـ ء}$ متعامدين

∴ كتلة المستطيل و حـ ء هـ تؤثر عند نقطة تلاقى قطريه $م_٢$ ($\frac{٧}{٢}$ ، $\frac{٥}{٢}$)

، كتلة المربع ؋ ب و هـ فى الوضع الجديد تؤثر عند تلاقى متوسطات △ و ب هـ

، من هندسة الشكل نجد : و ں = $\frac{١}{٢}$ و ؋ = $\frac{١}{٢}$ × ٥ $\sqrt{٢}$

∴ و$م_١$ = $\frac{٢}{٣}$ و ں = $\frac{٢}{٣}$ × $\frac{١}{٢}$ × ٥ $\sqrt{٢}$ = $\frac{٥}{٣}$ $\sqrt{٢}$

∴ $م_١$ = ($\frac{٥}{٣}\sqrt{٢}$ × حتا ٤٥° + ٧ ، $\frac{٥}{٣}\sqrt{٢}$ × حا ٤٥°) = ($\frac{٢٦}{٣}$ ، $\frac{٥}{٣}$)

و يكون جدول الكتب و الاحداثيات كما يلى :

	المربع ؋ ب و هـ	المستطيل و حـ ء هـ
الكتلة	٥ ك	٧ ك
س	$\frac{٢٦}{٣}$	$\frac{٧}{٢}$
ص	$\frac{٥}{٣}$	$\frac{٥}{٢}$

∴ $س_م$ = $\frac{٥ك × \frac{٢٦}{٣} + ٧ك × \frac{٧}{٢}}{٥ك + ٧ك}$ = $\frac{٤٠٧}{٧٢}$

، $ص_م$ = $\frac{٥ك × \frac{٥}{٣} + ٧ك × \frac{٥}{٢}}{٥ك + ٧ك}$ = $\frac{١٥٥}{٧٢}$

∴ احداثى مركز الثقل = ($\frac{٤٠٧}{٧٢}$ ، $\frac{١٥٥}{٧٢}$)

الاختبار الثانى

السؤال الأول : أختر الاجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة

(٦) تؤثر الكتلة ٥ كجم فى النقطة (٢ ، –١) و تؤثر الكتلة ٧ كجم فى النقطة (١ ، ٢)

فإن : مركز ثقل الكتلتين يؤثر فى النقطة ....

(؋) (١٧ ، ٩) (ب) ($\frac{١٧}{١٢}$ ، $\frac{٣}{٤}$)

(حـ) (١٩ ، ١٣) (ء) ($\frac{١٢}{١٣}$ ، $\frac{١}{٤}$)

الحل

الكتلة	٥	٧
س	٢	١
ص	–١	٢

∴ $س_م$ = $\frac{٥ × ٢ + ٧ × ١}{٥ + ٧}$ = $\frac{١٧}{١٢}$

، $ص_م$ = $\frac{٥ × (–١) + ٧ × ١}{٥ + ٧}$ = $\frac{٣}{٤}$

∴ احداثى مركز الثقل = ($\frac{١٧}{١٢}$ ، $\frac{٣}{٤}$)

السؤال الرابع :

(٢) ثنى قضيب منتظم $\overline{؋ حـ}$ طوله ١٥ ل من نقطة ب حيث ؋ ب = ٥ ل بحيث ں (∠؋ ب حـ) = ٩٠° و علق القضيب من الطرف ؋ تعليقاً حراً فاثبت أن $\overline{ب حـ}$ يميل على الأفقى بزاوية θ حيث طا θ = $\frac{٤}{٥}$

الحل

∵ القضيب منتظم

∴ يمكن اعتباره مكون من القضيبين : $\overline{؋ ب}$ ، $\overline{ب حـ}$ كل منهما منتظم و من نفس المادة

، ∵ ؋ ب = ٥ ل ، ؋ حـ = ١٥ ل

∴ ب حـ = ١٠ ل

؋
θ
م
ك
ء
٢ك
ب
هـ
θ
ى
حـ

∴ أ ب : ب حـ = ١ : ٢

، ∵ الأوزان تتناسب مع الأطوال

∴ بفرض أن كتلة من القضيبين هما ك ، ٢ ك على الترتيب

و مركز ثقل كل منهما يؤثر عند منتصفه أى ء ، ى كما بالشكل

و بأخذ الاتجاهين المتعامدين $\overleftarrow{ب حـ}$ ، $\overleftarrow{ب أ}$ يكون :

ى (٥ ل ، ٠) ، ء (٠ ، $\frac{٥}{٢}$ ل)

و نكون الجدول المقابل :

الكتلة	٢ ك	ك
س	٥ ل	٠
ص	٠	$\frac{٥}{٢}$ ل

∴ $س_م = \frac{٢ك \times ٥ ل + ك \times ٠}{٢ك + ك} = \frac{١٠}{٣}$ ل

، $ص_م = \frac{٢ك \times ٠ + ك \times \frac{٥}{٢} ل}{٢ك + ك} = \frac{٥}{٦}$ ل

∴ احداثى مركز الثقل = ($\frac{١٠}{٣}$ ل ، $\frac{٥}{٦}$ ل) بالنسبة لنقطة ب

أى أن : م ء = $\frac{١٠}{٣}$ ل ، م هـ = ب ء = $\frac{٥}{٦}$ ل

عند التعليق الحر من أ نجد أن $\overleftarrow{أ م}$ هو الخط الرأسى

و بفرض أن : $\overline{ب حـ}$ يصنع مع $\overleftarrow{أ م}$ زاوية قياسها θ

من هندسة الشكل نجد : أ ء = أ ب − ب ء = ٥ ل − $\frac{٥}{٦}$ ل = $\frac{٢٥}{٦}$ ل

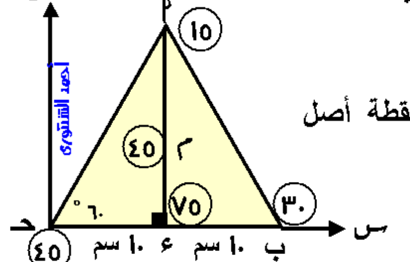
∴ طا θ = $\frac{٢٥}{٦}$ ل ÷ $\frac{١٠}{٣}$ ل = $\frac{٥}{٤}$

∴ $\overline{ب حـ}$ يميل على الأفقى بزاوية ظلها = طا (٩٠° − θ) = طتا θ = $\frac{٤}{٥}$

السؤال الخامس :

(٢) أ ب حـ مثلث متساوى الأضلاع طول ضلعه ٢٠ سم ، م نقطة تقاطع متوسطاته ، ء نقطة منتصف $\overline{ب حـ}$ ، ثبت كتل مقاديرها ١٥ ، ٣٠ ، ٧٥ ، ٤٥ ، ٤٥ فى النقط أ ، ب ، ء ، حـ ، م على الترتيب عين مركز ثقل هذه المجموعة ، و إذا رفعت الكتلة الموجودة عن ب فأين يقع مركز ثق المجموعة المتبقية

الحل



نختار اتجاهين متعامدين $\overleftarrow{حـ س}$ ، $\overleftarrow{حـ ص}$ كما بالشكل المقابل و ذلك باعتبار نقطة حـ نقطة أصل

و من هندسة الشكل نجد :

أ ء = ٢٠ حا ٦٠° = ١٠ $\sqrt{٣}$ سم

فيكون : حـ (٠ ، ٠) ، ء (١٠ ، ٠) ،

ب (٢٠ ، ٠) ، أ (١٠ ، ١٠ $\sqrt{٣}$) ، م (١٠ ، $\frac{١٠}{٣}\sqrt{٣}$)

و نكون جدول الكتل و احداثياتها كما يلى :

	عند حـ	عند ء	عند ب	عند أ	عند م
الكتلة	٤٥	٧٥	٣٠	١٥	٤٥
س	٠	١٠	٢٠	١٠	١٠
ص	٠	٠	٠	١٠ $\sqrt{٣}$	$\frac{١٠}{٣}\sqrt{٣}$

∴ $س_م = \frac{١٠ \times ٤٥ + ١٠ \times ١٥ + ٢٠ \times ٣٠ + ١٠ \times ٧٥ + ٠ \times ٤٥}{٤٥ + ١٥ + ٣٠ + ٧٥ + ٤٥} = \frac{٦٥}{٧}$

، $ص_م = \frac{\frac{١٠}{٣}\sqrt{٣} \times ٤٥ + ١٠\sqrt{٣} \times ١٥ + ٠ \times ٣٠ + ٠ \times ٧٥ + ٠ \times ٤٥}{٤٥ + ١٥ + ٣٠ + ٧٥ + ٤٥} = \frac{١٠}{٧}\sqrt{٣}$

∴ احداثى مركز الثقل = ($\frac{٦٥}{٧}$ ، $\frac{١٠}{٧}\sqrt{٣}$) بالنسبة للنقطة حـ

عند فصل الكتلة ٣٠ عند نقطة ب

نكون جدول الكتل و احداثياتها كما يلى :

الكتلة	عند حـ	عند ء	عند أ	عند م
الكتلة	٤٥	٧٥	١٥	٤٥
س	٠	١٠	١٠	١٠
ص	٠	٠	$10\sqrt{3}$	$\frac{10}{3}\sqrt{3}$

∴ $س_م = \frac{45 \times 0 + 75 \times 10 + 15 \times 10 + 45 \times 10}{45 + 75 + 15 + 45} = \frac{15}{2}$

، $ص_م = \frac{45 \times 0 + 75 \times 0 + 15 \times 10\sqrt{3} + 45 \times \frac{10}{3}\sqrt{3}}{45 + 75 + 15 + 45} = \frac{5}{7}\sqrt{3}$

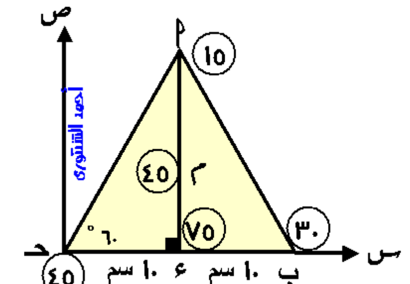
∴ احداثى مركز الثقل = $(\frac{15}{2} ، \frac{5}{7}\sqrt{3})$ بالنسبة للنقطة حـ

حل آخر للجزء الثانى :

∵ كتلة المجموعة = ٢١٠ ،

مركز ثقلها $(\frac{65}{7} ، \frac{10}{7}\sqrt{3})$

فيكون جدول الكتل و احداثياتها كما يلى :



الكتلة	٢١٠	– ٣٠
س	$\frac{65}{7}$	٢٠
ص	$\frac{10}{7}\sqrt{3}$	٠

∴ $س_م = \frac{210 \times \frac{65}{7} - 30 \times 20}{210 - 30} = \frac{15}{2}$

، $ص_م = \frac{210 \times \frac{10}{7}\sqrt{3} - 30 \times 0}{210 - 30} = \frac{5}{7}\sqrt{3}$

∴ احداثى مركز الثقل = $(\frac{15}{2} ، \frac{5}{7}\sqrt{3})$ بالنسبة للنقطة حـ

الاختبار الثالث

السؤال الأول : أختر الاجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة

(٦) مركز ثقل الصفيحة المنتظمة المثلثة الشكل يقع عند ....

الحل

مركز ثقل الصفيحة المنتظمة المثلثة الشكل يقع عند **نقطة تقاطع المتوسطات**

السؤال الرابع :

(٢) صفيحة رقيقة منتظمة على شكل مربع طول ضلعه ل فإذا كان هـ ، و ، ن منتصفات $\overline{أب}$ ، $\overline{أء}$ ، $\overline{بحـ}$ على الترتيب ، ثنى المثلث أ هـ و حول الضلع $\overline{هـ و}$ بحيث انطبقت أ على مركز المربع ى و ثنى المثلث ب هـ ن على الضلع $\overline{هـ ن}$ بحيث أنطبق الرأس ب على مركز المربع ى ، عين مركز ثقل الصفيحة فى وضعها الجديد

الحل

نأخذ الاتجاهين المتعامدين $\overrightarrow{ى هـ}$ ، $\overrightarrow{ى و}$

∵ الصفيحة رقيقة منتظمة

∴ يمكن اعتبار الصفيحة مكونة من ٤ أجزاء كما بالشكل

من هندسة الشكل :

$ى م_1 = \frac{2}{3} ى ر = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} ى أ$

$= \frac{1}{2}\sqrt{2}\ ل$ ×

∴ $م_1 = (\frac{1}{2}\sqrt{2}\ ل\ حتا 45° ، \frac{1}{2}\sqrt{2}\ ل\ حا 45°) = (\frac{1}{2} ل ، \frac{1}{2} ل)$

، بالمثل : $م_2 = (\frac{1}{2} ل ، - \frac{1}{2} ل)$ ، $م_3 = (- \frac{1}{4} ل ، \frac{1}{4} ل)$

، $م_4 = (- \frac{1}{4} ل ، - \frac{1}{4} ل)$ ، بفرض أن : كتلة الصفيحة = ٤ ك

∴ كتلة الصفيحة المثلثة و هـ ى المكونة من طبقتين = ك ، و مركزها $م_1$

، كتلة الصفيحة المثلثة ن هـ ى المكونة من طبقتين = ك ، و مركزها $م_٢$

، كتلة الصفيحة المربعة و ى ع ء = ك ، و مركزها $م_٣$

، كتلة الصفيحة المربعة ى ن حـ ع = ك ، و مركزها $م_٤$

و يكون جدول الكتل و الاحداثيات كما يلى :

الكتلة	ك	ك	ك	ك
س	$\frac{١}{٢}$ ل	$\frac{١}{٢}$ ل	$-\frac{١}{٤}$ ل	$-\frac{١}{٤}$ ل
ص	$\frac{١}{٢}$ ل	$-\frac{١}{٢}$ ل	$\frac{١}{٤}$ ل	$-\frac{١}{٤}$ ل

$$\therefore\ س_م = \frac{ك \times \frac{١}{٢}ل + ك \times \frac{١}{٢}ل + ك \times (-\frac{١}{٤}ل) + ك \times (-\frac{١}{٤}ل)}{ك + ك + ك + ك} = -\frac{١}{٢٤}ل$$

$$،\ ص_م = \frac{ك \times \frac{١}{٢}ل + ك \times (-\frac{١}{٢}ل) + ك \times \frac{١}{٤}ل + ك\ (-\frac{١}{٤}ل)}{ك + ك + ك + ك} = \text{صفر}$$

∴ احداثى مركز الثقل = $(-\frac{١}{٢٤}ل ، ٠)$ بالنسبة لمركز الصفيحة

حل آخر :

نأخذ الاتجاهين المتعامدين $\overleftarrow{ى هـ}$ ، $\overleftarrow{ى و}$

يمكن اعتبار الصفيحة مكون من ٣ أجزاء

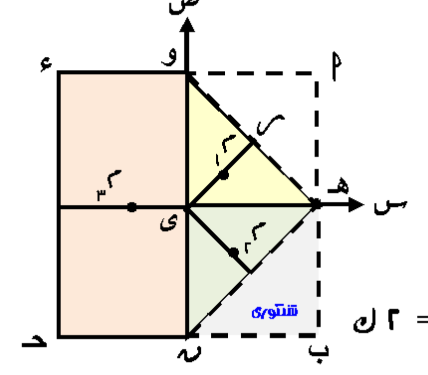
الصفيحة المثلثة و هـ ى المكونة من طبقتين و كتلتها = ك ، و مركزها $م_١$ ،

الصفيحة المثلثة ن هـ ى المكونة من طبقتين و كتلتها = ك ، و مركزها $م_٢$ ،

الصفيحة المستطيلة و ء حـ ن ، و كتلتها = ٢ ك

، و مركزها $م_٣$ $(-\frac{١}{٤}ل ، ٠)$

و يكون جدول الكتل و الاحداثيات كما يلى :



الكتلة	ك	ك	٢ ك
س	$\frac{١}{٢}$ ل	$\frac{١}{٢}$ ل	٠
ص	$\frac{١}{٢}$ ل	$-\frac{١}{٢}$ ل	$-\frac{١}{٤}$ ل

$$\therefore\ س_م = \frac{ك \times \frac{١}{٢}ل + ك \times \frac{١}{٢}ل + ك \times (-\frac{١}{٤}ل)}{ك + ك + ك + ك} = -\frac{١}{٢٤}ل$$

$$،\ ص_م = \frac{ك \times \frac{١}{٢}ل - ك \times \frac{١}{٢}ل + ك \times ٠}{ك + ك + ك + ك} = \text{صفر}$$

∴ احداثى مركز الثقل = $(-\frac{١}{٢٤}ل ، ٠)$ بالنسبة لمركز الصفيحة

السؤال الخامس :

(٢) اوجد مركز ثقل التوزيع التالى :

$و_١$ = ٢٠ نيوتن و يؤثر فى (٢ ، ١) ، $و_٢$ = ١٥ نيوتن و يؤثر فى (− ٣ ، ١) ، $و_٣$ = ٢٥ نيوتن و يؤثر فى (١ ، − ١)

الحل

$$\therefore\ س_م = \frac{٢٠ \times ٢ - ١٥ \times ٣ + ٢٥ \times ١}{٢٠ + ١٥ + ٢٥} = \frac{١}{٣}$$

$$،\ ص_م = \frac{٢٠ \times ١ + ١٥ \times ١ - ٢٥ \times ١}{٢٠ + ١٥ + ٢٥} = \frac{١}{٦}$$

∴ احداثى مركز الثقل = $(\frac{١}{٣} ، \frac{١}{٦})$

أحمد الشتورى

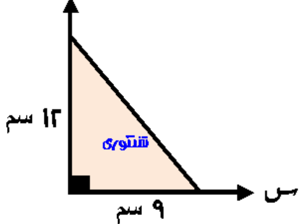
الاختبار الرابع

السؤال الأول : أختر الاجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة

(٦) مركز ثقل الصفيحة المظللة فى الشكل المقابل هو ....

(أ) (٣ ، ٤)   (ب) (٤ ، ٣)

(حـ) (٦ ، ٨)   (ء) (٨ ، ٦)



الحـــل

من الشكل تكون احداثيات رؤوس الصفيحة هى :

(٠ ، ٠) ، (٩ ، ٠) ، (٠ ، ١٢) ، ∵ الصفيحة مثلثة الشكل

∴ مركز ثقل الصفيحة يقع عند نقطة تلاقى المتوسطات

$$\therefore \text{احداثى مركز الثقل} = \left(\frac{٠ + ٩ + ٠}{٣} \text{ ، } \frac{٠ + ٠ + ١٢}{٣} \right) = (٣ \text{ ، } ٤)$$

السؤال الرابع :

(٢) أ ب حـ ء مربع طول ضلعه ٢٠ سم ، وضعت كتل متساوية المقدار عند رؤوسه ، أولاً : عين مركز ثقل المجموعة

ثانياً : إذا رفعت الكتلة الموجودة عند أحد رؤوسه " و ليكن حـ " فأين يقع مركز المجموعة المتبقية

الحـــل

أولاً : ∵ الصفيحة رقيقة منتظمة مربعة الشكل

∴ مركز الثقل يؤثر عند مركز المربع (نقطة تقاطع القطرين)

أى عند نقطة هـ (١٠ ، ١٠)

حل آخر

باختيار الاتجاهين المتعامدين $\overrightarrow{\text{أس}}$ ، $\overrightarrow{\text{أص}}$ كما بالشكل المقابل و ذلك باعتبار نقطة أ نقطة الأصل و بفرض أن كل كتلة عند كل رأس = ك

يكون جدول الكتل و الاحداثيات كما يلى :

	أ	ب	حـ	ء
الكتلة	ك	ك	ك	ك
س	٠	٢٠	٢٠	٠
ص	٠	٠	٢٠	٢٠

$$\text{س}_م = \frac{\text{ك} \times ٠ + \text{ك} \times ٢٠ + \text{ك} \times ٢٠ + \text{ك} \times ٠}{٤ \text{ك}} = ١٠$$

$$\text{، ص}_م = \frac{\text{ك} \times ٠ + \text{ك} \times ٠ + \text{ك} \times ٢٠ + \text{ك} \times ٢٠}{٤ \text{ك}} = ١٠$$

∴ احداثى مركز الثقل = (١٠ ، ١٠) بالنسبة لنقطة أ

ثانياً : عند رفع الكتلة عند الرأس حـ يكون :



	عند أ	عند ب	عند ء
الكتلة	ك	ك	ك
س	٠	٢٠	٠
ص	٠	٠	٢٠

$$\text{س}_م = \frac{\text{ك} \times ٠ + \text{ك} \times ٢٠ + \text{ك} \times ٠}{٣ \text{ك}} = \frac{٢٠}{٣}$$

$$\text{، ص}_م = \frac{\text{ك} \times ٠ + \text{ك} \times ٠ + \text{ك} \times ٢٠}{٤ \text{ك}} = \frac{٢٠}{٣}$$

∴ احداثى مركز الثقل = ($\frac{٢٠}{٣}$ ، $\frac{٢٠}{٣}$) بالنسبة لنقطة أ

حل آخر لثانياً :

مركز ثقل المجموعة المكونة من ٤ كتل عند كل رأس من رؤوس المربع يؤثر عند مركز المربع (نقطة تقاطع القطرين) و كتلته = ٤ ك

و الكتلة التى رفعت من الرأس حـ = ك

و يكون جدول الكتل و الاحداثيات كما يلى :

	هـ	حـ
الكتل	٤ ك	− ك
س	١٠	٢٠
ص	١٠	٢٠

∴ س م = (٤ك × ١٠ − ك × ٠) ÷ (٤ك − ك) = ٢٠ / ٣

، ص م = (٤ك × ١٠ − ك × ٠) ÷ (٤ك − ك) = ٢٠ / ٣

∴ مركز ثقل المجموعة المتبقية هو : (٢٠/٣ ، ٢٠/٣) بالنسبة لنقطة ﺃ

السؤال الخامس :

(أ) ﺃ ب حـ صفيحة على شكل مثلث متساوى الأضلاع كتلتها ٣ كجم ، م مركز ثقلها ، وُضعت كتل مقاديرها ٢ ، ٢ ، ١١ كجم عند الرؤوس ﺃ ، ب ، حـ على الترتيب ، برهن أن مركز ثقل المجموعة يقع عند نقطة منتصف م حـ

الحل

نختار اتجاهين متعامدين حـ س ، حـ ص كما بالشكل المقابل و ذلك باعتبار نقطة حـ نقطة الأصل

، بفرض أن : طول ضلع الصفيحة = ٤ ل وحدة طول

∴ ﺃ ء = ٤ ل حا ٦٠° = ٢ √٣ ل وحدة طول

، م ء = ١/٣ ﺃ ء = ٢/٣ √٣ ل وحدة طول

، هـ و = ١/٢ م ء = ١/٣ √٣ ل وحدة طول

و يكون جدول الكتل و احداثياتها كما يلى :

	ﺃ	ب	حـ	م
الكتلة	٢	٢	١١	٣
س	٢ ل	٤ ل	٠	٢ ل
ص	٢ √٣ ل	٠	٠	٢/٣ √٣ ل

∴ س م = (٢ × ٢ل + ٢ × ٤ل + ١١ × ٠ + ٣ × ٢ل) ÷ (٢ + ٢ + ١١ + ٣) = ل سم

، ص م = (٢ × ٢√٣ ل + ٢ × ٠ + ١١ × ٠ + ٣ × ٢/٣ √٣ ل) ÷ (٢ + ٢ + ١١ + ٣) = ١/٣ √٣ ل سم

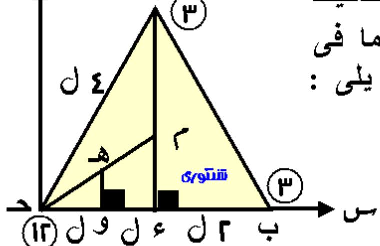
∴ احداثى مركز ثقل المجموعة = (ل ، ١/٣ √٣ ل) بالنسبة للنقطة حـ

، ∵ احداثى نقطة هـ = (ل ، ١/٣ √٣ ل)

∴ احداثى مركز ثقل المجموعة يقع عند نقطة منتصف م حـ

حل آخر

بتوزيع كتلة الصفيحة (٣ كجم) على رؤوس الصفيحة و اختيار الاتجاهين المتعامدين و ايجاد الأطوال كما فى الحل السابق يصبح جدول الكتل و احداثياتها كما يلى :



	ﺃ	ب	حـ
الكتلة	٣	٣	١٢
س	٢ ل	٤ ل	٠
ص	٢ √٣ ل	٠	٠

∴ س م = (٣ × ٢ل + ٣ × ٤ل + ١١ × ٠) ÷ (٢ + ٢ + ١١ + ٣) = ل سم

، ص م = (٣ × ٢√٣ ل + ٢ × ٠ + ١١ × ٠) ÷ (٢ + ٢ + ١١ + ٣) = ١/٣ √٣ ل سم

∴ احداثى مركز ثقل المجموعة = (ل ، $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ ل) بالنسبة للنقطة حـ

، ∵ احداثى نقطة هـ = (ل ، $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ ل)

∴ احداثى مركز ثقل المجموعة يقع عند نقطة منتصف $\overline{\text{م حـ}}$

حل ثالث

بتجميع الكتل الثلاث (٢ كجم) عند رؤوس الصفيحة إلى مركز ثقل الصفيحة فيصبح (٩ كجم) عند م ، (٩ كجم) عند حـ

فيكون : مركز ثقل المجموعة عند منتصف $\overline{\text{م حـ}}$

الاختبار الخامس

السؤال الأول : أختر الاجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة

(٦) يقع مركز ثقل الجسم الجاسئ المعلق تعليقاً حراً على الخط المستقيم الرأسى المار بـ ....

الحلــــ

يقع مركز ثقل الجسم الجاسئ المعلق تعليقاً حراً على الخط المستقيم الرأسى المار بـ نقطة التعليق

السؤال الرابع :

(٢) سلك منتظم طوله ١٠٠ سم ثُنى على هيئة خمسة أضلاع من مسدس منتظم أ ب حـ ء هـ و بدأ من نقطة أ ، عين بعد مركز ثقله عن مركز المسدس ، و إذا علق السلك تعليقاً حراً من طرفه أ عين قياس زاوية ميل $\overline{\text{أ ب}}$ على الرأسى فى وضع التوازن

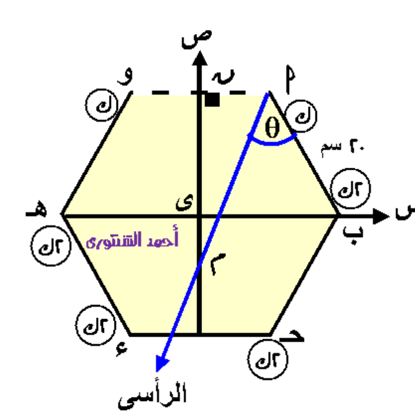


الحلــــ

طول كل ضلع = ١٠٠ ÷ ٥ = ٢٠ سم

بأخذ الاتجاهين المتعامدين $\overleftarrow{\text{ى س}}$ ، $\overleftarrow{\text{ى ص}}$ حيث ى " مركز المسدس " نقطة الأصل

و بفرض أن كل كتلة عند كل ضلع = ٢ ك و تؤثر فى منتصف كل منها و توزع عند كل رأس فتكون الكتل كما بالشكل المقابل ، و تكون الكتل و احداثياتها كما بالجدول التالى :



الكتلة	عند أ	عند ب	عند حـ	عند ء	عند هـ	عند و
	ك	٢ ك	٢ ك	٢ ك	٢ ك	ك
س	١٠	٢٠	١٠	− ١٠	− ٢٠	− ١٠
ص	$١٠\sqrt{٣}$	٠	$-١٠\sqrt{٣}$	$-١٠\sqrt{٣}$	٠	$١٠\sqrt{٣}$

$$س_م = \frac{ك \times ١٠ + ٢ك \times ٢٠ + ٢ك \times ١٠ - ٢ك \times ١٠ - ٢ك \times ٢٠ - ك \times ١٠}{ك + ٢ك + ٢ك + ٢ك + ٢ك + ك} = ٠$$

$$ص_م = \frac{ك \times ١٠\sqrt{٣} - ٢ك \times ١٠\sqrt{٣} - ٢ك \times ١٠\sqrt{٣} \, . \, ٠ - ك \times ١٠\sqrt{٣}}{ك + ٢ك + ٢ك + ٢ك + ٢ك + ك} = -٢\sqrt{٣}$$

∴ مركز الثقل هو (٠ ، $-٢\sqrt{٣}$) بالنسبة لنقطة ى ، ∵ ى (٠ ، ٠)

∴ مركز ثقل السسك يبعد $٢\sqrt{٣}$ عن مركز المسدس عند التعليق من أ

و يكون $\overleftarrow{أم}$ هو الخط الرأسى المار بنقطة التعليق أ

من الرسم نجد : طا (∠ ن أ م) = $\frac{١٢\sqrt{٣}}{١٠} = \frac{٦\sqrt{٣}}{٥}$

∴ ق (∠ ن أ م) = ١٨ $'$ ٦٤ $°$ ، ∵ قياس زاوية رأس المسدس = ١٢٠ $°$

∴ ق (∠ θ) = ١٢٠ $°$ − ١٨ $'$ ٦٤ $°$ = ٤٢ $'$ ٥٥ $°$

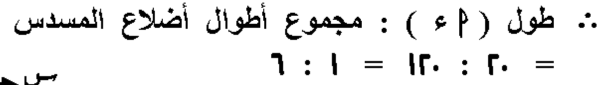
حل آخر " لايجاد مركز الثقل "

∵ المسدس منتظم ∴ أطوال أضلاعه متساوية و تتناسب مع كتلها

، ∵ طول السلك = ١٠٠ سم ∴ طول كل ضلع = ١٠٠ ÷ ٥ = ٢٠ سم

∴ طول الضلع السادس (أ ء) = ٢٠ سم ،

مجموع أطوال أضلاع المسدس = ١٢٠ سم



∴ طول (أ ء) : مجموع أطوال أضلاع المسدس

= ٢٠ : ١٢٠ = ١ : ٦

، بفرض أن : كتلة أضلاع المسدس = ٦ ك

، و يؤثر عند نقطة ى

، كتلة طول (أ ء) = ك

، و يؤثر عند نقطة تبعد نقطة ن

حيث : ى ن = $\frac{١}{٢}$ ن ز = $\frac{١}{٢}$ × ٢٠ حا ٦٠ $°$ = $١٠\sqrt{٣}$ سم

فتكون الكتل و احداثياتها كما بالجدول التالى :

الكتلة	٦ ك	− ك
س	٠	٠
ص	٠	$١٠\sqrt{٣}$

$$∴ س_م = \frac{٦ك \times ٠ - ك \times ٠}{٦ك - ك} = \text{صفر}$$

$$، ص_م = \frac{٦ك \times ٠ - ك \times ١٠\sqrt{٣}}{٦ك - ك} = -٢\sqrt{٣}$$

∴ مركز الثقل = (٠ ، $-٢\sqrt{٣}$) بالنسبة لنقطة ى





اجابات اختبارات الأستاتيكا

الاختبار الأول

أولاً : أجب عن السؤال التالى :

السؤال الأول : أختر الاجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة

(١) إذا كانت θ هى قياس الزاوية بين قوة الاحتكاك النهائى و رد الفعل المحصل فإن : معامل الاحتكاك السكونى يساوى ....

(أ) طا θ (ب) حا θ (حـ) حتا θ (ء) ظتا θ

الحل

∵ θ قياس الزاوية بين قوة الاحتكاك النهائى و رد الفعل المحصل

∴ قياس زاوية الاحتكاك = ٩٠° − θ

∴ م س = طا (٩٠° − θ) = ظتا θ

(٢) الشكل المقابل يمثل قضيب فى حالة اتزان فإن : ق = ...

(أ) ٢٨ نيوتن (ب) ١٦ نيوتن (حـ) ٢ نيوتن (ء) ٤ نيوتن

الحل

∵ القضيب متزن

∴ مجموع القياسات الجبرية لعزوم القوى حول نقطو تأثير الحامل = صفر

∴ ٢٠ × ٤ − ١٢ × ٤ − ق × ٢ = صفر

و منها : ق = ١٦ نيوتن

(٣) إذا كانت القوة ق→ = ٣ س→ − ٥ ص→ تؤثر فى النقطة (−١ ، ١) فإن : عزم القوة ق→ بالنسبة لنقطة الأصل يساوى ....

(أ) − ٢ ع→ (ب) ٢ ع→ (حـ) ٨ ع→ (ء) − ٨ ع→

الحل

ج→و = ر→ × ق→ = (−١ ، ١) × (٣ ، −٥) = ٢ ع→

(٤) قوتان تكونان ازدواج ، مقدار احداهما ١٥ نيوتن و عزم الازدواج المحصل منهما ٤٥ نيوتن . سم فإن : البعد العمودى بينهما يساوى ....

(أ) ٦٧٥ سم (ب) ٦٠ سم (حـ) ٣ سم (ء) ٣٠ سم

الحل

بفرض أن :

البعد العمودى بين القوتين = ل سم

∵ القوتان تكونان ازدواجاً

∴ ق = ١٥ نيوتن

، ∵ عزم الازدواج المحصل = ٤٥ نيوتن . سم

∴ ١٥ × ل = ٤٥ و منها : ل = ٣ سم

(٥) إذا اتزنت مجموعة من القوى المستوية فإن مجموع عزومها حول أى نقطة فى المستوى يساوى ....

(أ) ثابت غير صفرى (ب) صفر

(حـ) محصلة هذه القوى (ء) الواحد الصحيح

الحل

صفر

(٦) مركز ثقل جسمين ماديين كتل كل منهما ٣ نيوتن ، ٦ نيوتن و المسافة بينهما ١٥ سم يبعد عن الجسم ٣ نيوتن مسافة .... سم

(أ) ٥ (ب) ١٠ (حـ) ٧,٥ (ء) ٩

الحل

بفرض أن :

مركز الثقل يبعد عن الجسم ٣ نيوتن مسافة = س سم

∴ ٣ س = ٦ × (١٥ − س)

∴ ٣ س = ٩٠ − ٦ س

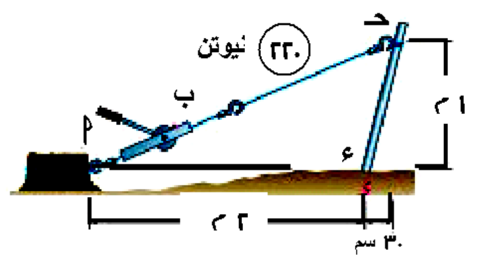
و منها : س = ١٠ سم

السؤال الثانى :

ثانياً : أجب عن ثلاثة أسئلة فقط مما يلى :

(أ) الشكل المقابل :

يوضح شداد أ ب يؤثر على عمود مائل حـ ء
أوجد معيار عزم قوة الشد بالنسبة للنقطة ء



الحل

نرسم ء هـ ⊥ أ حـ ، حـ ى ⊥ أ ء

∴ من △ أ حـ ى القائم الزاوية فى ى

∴ (أ حـ)² = (حـ ى)² + (أ ى)²

= (١)² + (٢,٣)² = ٦,٢٩

∴ أ حـ = ٢,٥٠٧٩٨ م ، حا أ = ٠,٣٩٨٧

∴ من △ أ ء هـ القائم الزاوية فى هـ :

ء هـ = أ ء × حا أ = ٢ × ٠,٣٩٨٧ = ٠,٧٩٧٤

∴ ع ء = ٢٢٠ × ٠,٧٩٧٤ = ١٧٥,٤ نيوتن . م

(٢) وضع جسم وزنه (و) على مستوى خشن يميل على على الأفقى بزاوية قياسها (هـ) فإذا كان قياس زاوية الاحتكاك هو (ل) فاوجد مقدار و اتجاه القوة التى تجعل الجسم على وشك الحركة لأعلى

الحل

نفرض أن : ق تميل على المستوى بزاوية قياسها ى

∵ قياس زاوية الاحتكاك = ل

∴ م س = طا ل = حا ل / حتا ل

، ع س = م س ر = ر حا ل / حتا ل

∵ الجسم على وشك الحركة ،

∴ معادلتا الاتزان هما :

ق حتا ى = و حا هـ + م س ر

= و حا هـ + ر حا ل / حتا ل   بالضرب × حتا ل ينتج :

ق حتا ى حتا ل = و حا هـ حتا ل + ر حا ل   (١)

، ر + ق حا ى = و حتاهـ

∴ ر = و حتاهـ − ق حا ى   بالتعويض من (١) ينتج :

ق حتا ى حتا ل = و حا هـ حتا ل + (و حتاهـ − ق حا ى) × حا ل

∴ ق حتا ى حتا ل = و حا هـ حتا ل + و حتاهـ حا ل − ق حا ى حا ل

∴ ق حتا ى حتا ل + ق حا ى حا ل = و حا هـ حتا ل + و حتاهـ حا ل

∴ ق حتا (ى − ل) = و (هـ + ل)

∴ ق = و (هـ + ل) / حتا (ى − ل)

و يكون مقدار ق أقل ما يمكن عندما يكون حتا (ى − ل) أكبر ما يمكن

أى عندما : حتا (ى − ل) = ١

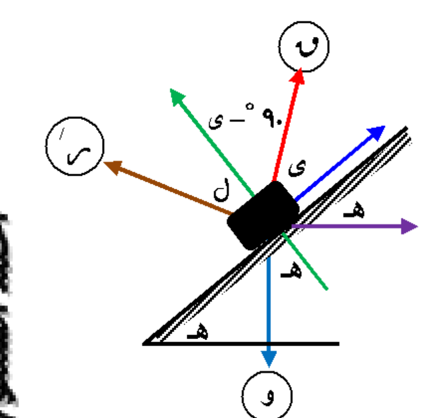
∴ ى − ل = ٠ أى : ى = ل

∴ مقدار القوة = و (هـ + ل) و خط عملها يصنع مع المستوى زاوية قياسها = قياس زاوية الاحتكاك

حل آخر

لايجاد مقدار القوة

من الشكل المقابل باستخدام قاعدة لامى ينتج :



ق / حا [١٨٠° − (هـ + ل)] = و / حا [٩٠° − (ى − ل)] = ر′ / حا [٩٠° + (ى + هـ)]

∴ ق / حا (هـ + ل) = و / حتا (ى − ل)

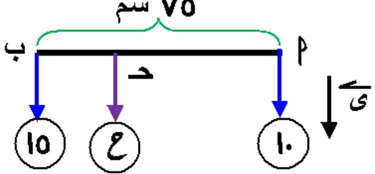
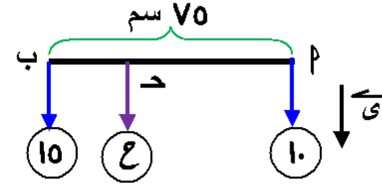
∴ ق = و (هـ + ل) / حتا (ى − ل)

السؤال الثالث :

(١) قوتان متوازيتان و فى نفس الاتجاه مقدارهما ١٠ ، ١٥ نيوتن تؤثران فى النقطتين أ ، ب حيث أ ب = ٧٥ سم

أوجد محصلة القوتين

الحل

نفرض ى⃖ متجه وحدة فى اتجاه القوتين

∴ ق⃖١ = ١٠ ى⃖ ، ق⃖٢ = ١٥ ى⃖

مقدار المحصلة :

ح⃖ = ق⃖١ + ق⃖٢ = ١٠ ى⃖ + ١٥ ى⃖ = ٢٥ ى⃖

اتجاه المحصلة :

نفرض أن المحصلة تؤثر فى نقطة حـ ∈ أ ب

∴ ١٠ × أ حـ = ١٥ × ب حـ

∴ ١٠ × أ حـ = ١٥ × (٧٥ − أ حـ)

∴ ١٠ أ حـ = ١١٢٥ − ١٥ أ حـ

∴ ٢٥ أ حـ = ١١٢٥ ∴ أ حـ = ٤٥ سم

أى أن : مقدار المحصلة يساوى ٢٥ نيوتن و يعمل اتجاهها فى نفس اتجاه القوتين و تؤثر فى نقطة تبعد عن أ بمقدار ٤٥ سم

(٢) أ ب حـ مثلث متساوى الساقين فيه أ ب = أ حـ = ١٣ سم ، ب حـ = ١٠ سم ، اثرت القوى ٦٥ ، ق ، ٦٥ نيوتن فى أ ب⃖ ، ب حـ⃖ ، أ حـ⃖ على الترتيب ، فإذا كانت مجموعة القوى تكافئ ازدواج فما قيمة ق ، و معيار عزم الازدواج

الحل

∵ القوى تؤثر فى أضلاع مثلث و مأخوذة فى ترتيب دورى واحد ، و تكافئ ازدواجاً

∴ م = مقدار القوة الممثل لوحدة الأطوال = ٦٥/١٣ = ٥

∴ ق/١٠ = ٥ و منها : ق = ٥٠ نيوتن

، هندسة الشكل : أ ء = ١٢ سم (فيثاغورث)

، معيار عزم الازدواج = ٢ م (△ أ ب حـ) × م

= ٢ × ½ × أ ب × أ حـ × حا أ × م

= ٢ × ½ × أ ب × أ حـ × ٢ حا ½ أ حتا ½ أ × م

∴ معيار عزم الازدواج = ٢ × $\frac{١}{٢}$ × ١٣ × ١٣ × ٢ × $\frac{٥}{١٣}$ × $\frac{١٢}{١٣}$ × ٥

= ٦٠٠ نيوتن . سم

السؤال الرابع :

(١) أ ب قضيب رفيع خفيف طوله ٢ ل معلق فى مستوى رأسى من طرفيه أ ، ب يميلان على الرأسى بزاويتين ٣٠° ، ٦٠° على الترتيب ، علق فى القضيب الثقلان ٢ ، ٨ نيوتن على بعد من أ يساوى $\frac{١}{٥}$ ل ، $\frac{١}{٢}$ ل أوجد فى وضع التوازن مقدار الشد فى الخيطين و قياس زاوية ميل القضيب على الأفقى

الحل

∵ القضيب متزن ∴ معادلات الاتزان هى :

ش١ حتا ٦٠° = ش٢ حا ٣٠°

∴ ش١ × $\frac{١}{٢}$ = ش٢ × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ∴ ش١ = $\sqrt{٣}$ ش٢ (١)

، ش١ حا ٦٠° + ش٢ حتا ٣٠° = ٢ + ٨

∴ ش١ × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ + ش٢ × $\frac{١}{٢}$ = ١٠ بالتعويض من (١) ينتج :

∴ $\frac{٣}{٢}$ ش٢ + $\frac{١}{٢}$ ش٢ = ١٠ ∴ ٢ ش٢ = ١٠

∴ ش٢ = ٥ وحدة وزن

، بالتعويض فى (١) ينتج : ش١ = ٥ $\sqrt{٣}$ وحدة وزن

، بفرض أن القضيب يميل على الأفقى بزاوية قياسها θ

، ∵ ع ب = ٠

∴ ش١ حا ٦٠° × ٢ ل حتا θ − ش١ حتا ٦٠° × ٢ ل حا θ

− ٢ × (ل + $\frac{٤}{٥}$ ل) حتا θ − ٨ × $\frac{٤}{٥}$ ل حتا θ = ٠

∴ ٥ $\sqrt{٣}$ × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ × ٢ ل حتا θ − ٥ $\sqrt{٣}$ × $\frac{١}{٢}$ × ٢ ل حا θ

− ٢ × $\frac{٩}{٥}$ ل حتا θ − ٨ × $\frac{٤}{٥}$ ل حتا θ = ٠

، بالقسمة ÷ ل حتا θ ينتج :

١٥ − ٥ $\sqrt{٣}$ ظا θ − $\frac{١٨}{٥}$ − $\frac{٣٢}{٥}$ = ٠

∴ ٥ $\sqrt{٣}$ ظا θ = ٥ ∴ ظا θ = $\frac{١}{\sqrt{٣}}$ ∴ θ = ٣٠°

(٢) أ ب حـ مثلث متساوى الأضلاع طول ضلعه ١٠ سم ، اثرت الأوزان ٣ ، ٦ ، ٩ نيوتن فى رؤوسه ، عين موضع مركز ثقل المجموعة

الحل

نختار اتجاهين متعامدين $\overrightarrow{أس}$ ، $\overrightarrow{أص}$ كما بالشكل المقابل و ذلك باعتبار نقطة أ نقطة أصل و من هندسة الشكل نجد :

حـ ء = ١٠ حا ٦٠° = ٥ $\sqrt{٣}$ سم

فيكون : أ (٠ ، ٠) ، ب (١٠ ، ٠)

، حـ (٥ ، ٥ $\sqrt{٣}$)

و نكون جدول الأوزان و احداثياتها كما يلى :

	أ	ب	حـ
و	٣	٦	٩
س	٠	١٠	٥
ص	٠	٠	$٥\sqrt{٣}$

∴ $س_م = \frac{٥ × ٩ + ١٠ × ٦ + ٠ × ٣}{٩ + ٦ + ٣} = \frac{٣٥}{٦}$ سم

، $ص_م = \frac{٣\sqrt{٥} × ٩ + ٠ × ٦ + ٠ × ٣}{٩ + ٦ + ٣} = \frac{٥\sqrt{٣}}{٢}$ سم

∴ احداثى مركز الثقل = ($\frac{٣٥}{٦}$ ، $\frac{٥\sqrt{٣}}{٢}$) بالنسبة للنقطة أ

ملاحظات :

[١] لا يتغير مركز الثقل للنظام بتغير مواضع المحاور المتعامدة

حيث لا يتغير البعد بين موضع مركز الثقل و كل من موضع الأوزان بتغير مواضع المحاور المتعامدة

ففى الحل السابق نجد :

$أم_{أ} = \sqrt{(\frac{٣٥}{٦} - ٠)^{٢} + (\frac{٥\sqrt{٣}}{٢} - ٠)^{٢}} = \sqrt{٥٢,٧٧} = ٧,٣$ سم

بالمثل $ب م_{أ} = ٣٦,١١ = ٦$ سم ، $حـ م_{أ} = ١٩,٤٤ = ٤,٤$ سم

[٢] إذا أعتبرنا أ (٥ ، $٥\sqrt{٣}$) ، ب (٠ ، ٠) ، حـ (١٠ ، ٠)

فإن : احداثى مركز الثقل = ($\frac{٣٥}{٦}$ ، $\frac{٥\sqrt{٣}}{٦}$) بالنسبة للنقطة ب

و يكون : $أم_{ب} = ٧,٣$ سم ، $ب م_{ب} = ٦$ سم ، $حـ م_{ب} = ٤,٤$ سم

[٣] إذا أعتبرنا أ (١٠ ، ٠) ، ب (٥ ، $٥\sqrt{٣}$) ، حـ (٠ ، ٠)

فإن : احداثى مركز الثقل = ($\frac{١٠}{٣}$ ، $\frac{٥\sqrt{٣}}{٣}$) بالنسبة للنقطة حـ

و يكون : $أم_{حـ} = ٧,٣$ سم ، $ب م_{حـ} = ٦$ سم ، $حـ م_{حـ} = ٤,٤$ سم

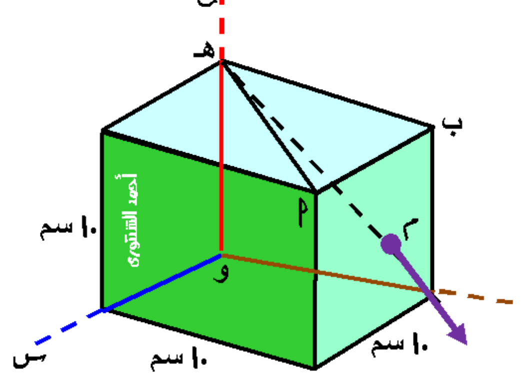
السؤال الخامس :

(أ) فى الشكل المقابل :



قوة $٢٥\sqrt{٦}$ نيوتن تؤثر فى $\overleftarrow{هـ م}$

اوجد مركبات عزم القوة بالنسبة لمحاور الاحداثيات



الحل

من هندسة الشكل نجد أن :

هـ (٠ ، ٠ ، ١٠) ، م (٥ ، ١٠ ، ٥)

∴ $\overleftarrow{هـ م} = \overleftarrow{م} - \overleftarrow{هـ}$ = (٥ ، ١٠ ، −٥)

∴ $\|\overleftarrow{هـ م}\| = ٥\sqrt{٦}$

، $\overleftarrow{ق} = ق \left(\frac{\overleftarrow{هـ م}}{\|\overleftarrow{هـ م}\|} \right)$

$= ٢٥\sqrt{٦} \left(\frac{(٥ ، ١٠ ، -٥)}{٥\sqrt{٦}} \right)$

= (٢٥ ، ٥٠ ، −٢٥)

، ∵ $\overleftarrow{و هـ}$ = (٠ ، ٠ ، ١٠)

∴ $\overleftarrow{جـ_{و}} = \overleftarrow{و هـ} \times \overleftarrow{ق}$ = (٠ ، ٠ ، ١٠) × (٢٥ ، ٥٠ ،)

$= \begin{vmatrix} \overleftarrow{س} & \overleftarrow{ص} & \overleftarrow{ع} \\ ٠ & ٠ & ١٠ \\ ٢٥ & ٥٠ & -٢٥ \end{vmatrix} = -٥٠٠ \overleftarrow{س} + ٢٥٠ \overleftarrow{ص}$

∴ مركبة عزم $\overleftarrow{ق}$ بالنسبة لمحور السينات = − ٥٠٠

، مركبة عزم $\overleftarrow{ق}$ بالنسبة لمحور الصادات = ٢٥٠

، مركبة عزم $\overleftarrow{ق}$ بالنسبة لمحور السينات = صفر

(٢) صفيحة رقيقة منتظمة الكثافة على شكل مستطيل أ ب حـ ء فيه :
أ ب = ٥ سم ، ب حـ = ١٢ سم ، هـ ∈ $\overleftarrow{\text{أ ء}}$ بحيث أ هـ = ٥ سم
ثنى المثلث أ ب هـ حول الضلع $\overline{\text{ب هـ}}$ حتى أنطبق $\overline{\text{أ ب}}$ على $\overline{\text{ب حـ}}$ تماماً ، عين موضع مركز ثقل الصفيحة بعد ثنيها بالنسبة إلى : $\overleftarrow{\text{حـ ب}}$ ، $\overleftarrow{\text{حـ ء}}$

الحل

$\dfrac{\text{مساحة المربع أ ب و هـ}}{\text{مساحة المستطيل و حـ ء هـ}} = \dfrac{٢٥}{٣٥} = \dfrac{٥}{٧}$

∵ الصفيحة رقيقة منتظمة الكثافة
∴ المساحات تتناسب مع الكتل
بفرض أن كتلة المربع أ ب و هـ = ٥ ك
∴ كتلة المستطيل و حـ ء هـ = ٧ ك
، ∵ الاتجاهين $\overleftarrow{\text{حـ ب}}$ ، $\overleftarrow{\text{حـ ء}}$ متعامدين
∴ كتلة المستطيل و حـ ء هـ تؤثر عند نقطة تلاقى قطريه $م_٢$ ($\frac{٧}{٢}$ ، $\frac{٥}{٢}$)
، كتلة المربع أ ب و هـ فى الوضع الجديد تؤثر عند تلاقى متوسطات △ و ب هـ
، من هندسة الشكل نجد : و ن = $\frac{١}{٢}$ أ و = $\frac{١}{٢} \times ٥\sqrt{٢}$
∴ و $م_١$ = $\frac{٢}{٣}$ و ن = $\frac{٢}{٣} \times \frac{١}{٢} \times ٥\sqrt{٢} = \frac{٥}{٣}\sqrt{٢}$
∴ $م_١$ = ($\frac{٥}{٣}\sqrt{٢}$ × حتا ٤٥° + ٧ ، $\frac{٥}{٣}\sqrt{٢}$ × حا ٤٥°) = ($\frac{٢٦}{٣}$ ، $\frac{٥}{٣}$)
و يكون جدول الاحداثيات كما يلى :

	المربع أ ب و هـ	المستطيل و حـ ء هـ
الكتلة	٥ ك	٧ ك
س	$\frac{٢٦}{٣}$	$\frac{٧}{٢}$
ص	$\frac{٥}{٣}$	$\frac{٥}{٢}$

∴ $س_م = \dfrac{٥ك \times \frac{٢٦}{٣} + ٧ك \times \frac{٧}{٢}}{٥ك + ٧ك} = \dfrac{٤٠٧}{٧٢}$

، $ص_م = \dfrac{٥ك \times \frac{٥}{٣} + ٧ك \times \frac{٥}{٢}}{٥ك + ٧ك} = \dfrac{١٥٥}{٧٢}$

∴ احداثى مركز الثقل = ($\frac{٤٠٧}{٧٢}$ ، $\frac{١٥٥}{٧٢}$)

الاختبار الثانى

أولاً : أجب عن السؤال التالى :

السؤال الأول : أختر الاجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطة

(أ) يؤثر على الجسم ازدواجان الأول مقدار احدى قوتيه ٢٠ ث كجم و ذراع العزم $\frac{١}{٢}$ متر و اتجاه دورانه فى عكس اتجاه دوران الساعة و الثانى مقدار احدى قوتيه ٣٠ ث كجم و ذراع العزم ١ متر و اتجاه دورانه فى اتجاه دوران الساعة
فإن : الازدواج المحصل يساوى ....

(أ) ٢٠ ث كجم . م و اتجاه دورانه فى اتجاه دوران الساعة
(ب) ٢٠ ث كجم . م و اتجاه دورانه فى عكس اتجاه دوران الساعة
(حـ) ٤٠ ث كجم . م و اتجاه دورانه فى اتجاه دوران الساعة
(ء) ٤٠ ث كجم . م و اتجاه دورانه فى عكس اتجاه دوران الساعة

الحل

الازدواج المحصل = ٢٠ × $\frac{١}{٢}$ − ٣٠ × ١ = − ٢٠ ث كجم . م
∴ الازدواج المحصل = ٢٠ ث كجم . م و اتجاه دورانه فى اتجاه دوران الساعة

(٢) زاوية الاحتكاك هى ....

(أ) الزاوية المحصورة بين رد الفعل العمودى و رد الفعل المحصل
(ب) النسبة بين قوة الاحتكاك النهائى و رد الفعل العمودى
(حـ) النسبة بين معامل الاحتكاك السكونى و معامل الاحتكاك الحركى
(ء) الزاوية المحصورة بين قوة الاحتكاك النهائى و رد الفعل المحصل

الحل

الزاوية المحصورة بين رد الفعل العمودى و رد الفعل المحصل

(٣) الشكل المقابل يوضح :

تأثير قوة مقدارها ق على طرف قضيب قياس الزاوية θ التى تولد أكبر عزم حول النقطة ب هو ....

(أ) ٠° (ب) ٩٠° (حـ) ٤٥° (ء) ٣٠°

الحل

نفرض أن : طول القضيب = ل وحدة طول

∴ طول العمود الساقط من ب على خط عمل القوة = ل حا θ

∴ $ع_{ب}$ = ق ل حا θ

و يكون : $ع_{ب}$ أكبر ما يمكن عندما : حا θ = ١ أى عندما : θ = ٩٠°

(٤) قوتان متوازيتان و متضادتان فى الاتجاه مقدار احداهما ٧ نيوتن و مقدار محصلتهما ١٠ نيوتن

فإن : مقدار القوة الأخرى يساوى ....

(أ) ٣ نيوتن (ب) ١٧ نيوتن (حـ) ٢٧ نيوتن (ء) ٦ نيوتن

الحل

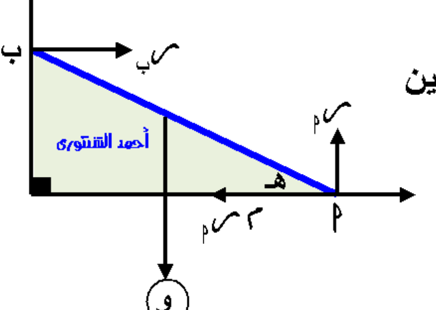
نفرض ى متجه وحدة فى اتجاه محصلة القوتين من الشكل المقابل :

١٠ ى = $ق_{٢}$ ى − ٧ ى

و منها : $ق_{٢}$ = ١٧ ى

أى أن : مقدار القوة الأخرى = ١٧ نيوتن

(٥) فى الشكل المقابل :



إذا كانت ل هى زاوية الاحتكاك بين الأرض و القضيب

فإن : طا هـ . طا ل = ...

(أ) ٢ (ب) $\frac{١}{٢}$ (حـ) ١ (ء) ٣

الحل

∵ القضيب متزن

∴ $ر_{أ}$ = و (١) ، $ر_{ب}$ = م $ر_{أ}$ = طا ل $ر_{أ}$ = و طا ل (٢)

و بفرض أن : طول القضيب = س وحدة طول

، ∵ $ع_{أ}$ = ٠ ∴ و × $\frac{١}{٢}$ س حتا هـ − $ر_{ب}$ × س حا هـ = ٠

و بالقسمة على س حتا هـ ينتج : و = ٢ $ر_{ب}$ طا هـ ∴ من (٢) ينتج :

و = ٢ و طا ل . طا هـ ، و منها ينتج : طا هـ . طا ل = $\frac{١}{٢}$

(٦) تؤثر الكتلة ٥ كجم فى النقطة (٢ ، −١) و تؤثر الكتلة ٧ كجم فى النقطة (١ ، ٢)

فإن : مركز ثقل الكتلتين يؤثر فى النقطة ....

(أ) (١٧ ، ٩)　　(ب) ($\frac{١٧}{١٢}$ ، $\frac{٣}{٤}$)

(حـ) (١٩ ، ١٣)　　(ء) ($\frac{١٢}{١٣}$ ، $\frac{١}{٤}$)

الحل

الكتلة	٥	٧
س	٢	١
ص	١−	٢

∴ $س_م = \frac{٥ \times ٢ + ٧ \times ١}{٥ + ٧} = \frac{١٧}{١٢}$

، $ص_م = \frac{٥ \times (١-) + ٧ \times ١}{٥ + ٧} = \frac{٣}{٤}$

∴ احداثى مركز الثقل = ($\frac{١٧}{١٢}$ ، $\frac{٣}{٤}$)

ثانياً : أجب عن ثلاثة أسئلة فقط مما يلى :

السؤال الثانى :

(١) إذا كانت القوة $\overleftarrow{ق}$ = ٥ $\overleftarrow{س}$ − $\overleftarrow{ص}$ + ٣ $\overleftarrow{ع}$ تؤثر فى النقطة (−١ ، ٢ ، ١) أوجد :

أولاً : عزم القوة بالنسبة لنقطة الأصل

ثانياً : طول العمود المرسوم من نقطة الأصل على خط عمل $\overleftarrow{ق}$

الحل

$\overleftarrow{وأ}$ = (−١ ، ٢ ، ١) ، $\overleftarrow{ق}$ = (٥ ، −١ ، ٣)

$$\overleftarrow{جـ_و} = \begin{vmatrix} \overleftarrow{س} & \overleftarrow{ص} & \overleftarrow{ع} \\ ١- & ٢ & ١ \\ ٥ & ١- & ٣ \end{vmatrix} = ٧\,\overleftarrow{س} + ٨\,\overleftarrow{ص} - ٩\,\overleftarrow{ع}$$

$(\|\overleftarrow{جـ_و}\|)^٢ = ٤٩ + ٦٤ + ٨١ = ١٩٤$　　∴ $\|\overleftarrow{جـ_و}\| = \sqrt{١٩٤}$

، $(\|\overleftarrow{ق}\|)^٢ = ٢٥ + ١ + ٩ = ٣٥$　　∴ $\|\overleftarrow{ق}\| = \sqrt{٣٥}$

طول العمود = $\frac{\|\overleftarrow{جـ_و}\|}{\|\overleftarrow{ق}\|} = \frac{\sqrt{١٩٤}}{\sqrt{٣٥}}$

(٢) برهن أن : إذا وضع جسم على مستوى مائل خشن و كان الجسم على وشك الانزلاق فإن : قياس زاوية الاحتكاك يساوى قياس زاوية ميل المستوى على الأفقى

الحل

بفرض أن : قياس زاوية الاحتكاك = ل

، قياس زاوية ميل المستوى على الأفقى = θ

∵ الجسم على وشك الانزلاق

∴ معادلتا الاتزان هما :

$م_س$ ر = و حا θ ، ر = و حتا θ

∴ و حا θ = $م_س$ و حتا θ

= و طا ل حتا θ

و منها : طا θ = طا ل　∴ θ = ل

أى أن : قياس زاوية الاحتكاك = قياس زاوية ميل المستوى على الأفقى

السؤال الثالث :

(١) وضعت ثلاثة اجسام أوزانها ٥ ، ٧ ، ١١ ث كجم على قضيب خفيف كما بالشكل عين نقطة تعليق على القضيب بحيث يظل القضيب أفقياً



الحل

نفرض أن : القضيب يعلق من نقطة حـ التى تبعد عن أ مسافة = ل وحدة طول

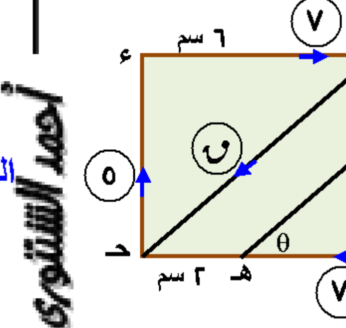
∴ $ع_{حـ}$ = ٠

∴ − ٩ × ل − ٧ × (ل − ٦) + ١١ × (١٥ − ل) = ٠

∴ − ٩ ل − ٧ ل + ٤٢ + ١٦٥ − ١١ ل = ٠ ، و منها : ل = ٩

أى أن : القضيب يعلق من نقطة على بعد ٩ وحدة طول من نقطة أ

(٢) ؏ ب حـ ء مستطيل فيه ؏ ب = ٦ سم ، ب حـ = ٨ سم ، هـ ∈ $\overline{\text{ب حـ}}$ ، و ∈ $\overline{\text{؏ ء}}$ بحيث ب هـ = ء و = ٦ سم أثرت قوى مقاديرها ٥ ، ٥ ، ٧ ، ٧ ، ق ، ق ث كجم فى اتجاهات $\overleftarrow{\text{؏ ب}}$ ، $\overleftarrow{\text{حـ ء}}$ ، $\overleftarrow{\text{ب حـ}}$ ، $\overleftarrow{\text{؏ ء}}$ ، $\overleftarrow{\text{؏ هـ}}$ ، $\overleftarrow{\text{حـ و}}$ على الترتيب فإذا كانت المجموعة تكافئ ازدواج معيار عزمه ١٠ ث كجم . سم فى اتجاه حـ ب ؏ ء أوجد ق



الحل

القوتان (٥ ، ٥) تكونان ازدواجاً

القياس الجبرى لعزمه

$ع_{١}$ = – ٥ × ٨ = – ٤٠ ث كجم . سم

القوتان (٧ ، ٧) تكونان ازدواجاً

القياس الجبرى لعزمه

$ع_{٢}$ = – ٧ × ٦ = – ٤٢ ث كجم . سم

القوتان (ق ، ق) تكونان ازدواجاً القياس الجبرى لعزمه

$ع_{٣}$ = ق × ل ث كجم . سم

من هندسة الشكل : ل = ؏ ء حتا θ = ٢ حتا ٤٥°

∴ $ع_{٣}$ = ٢ ق حتا ٤٥°

∵ المجموعة تكافئ ازدواجاً القياس الجبرى لعزمه = ١٠ ث كجم . سم ،

∴ ١٠ = ٢ ق حتا ٤٥° – ٤٠ – ٤٢

∴ ٩٢ = ٢ ق × $\frac{١}{\sqrt{٢}}$

و منها : ق = ٤٦ $\sqrt{٢}$ ث كجم

السؤال الرابع :

(أ) فى الشكل المقابل :

ترتكز احدى نهايتى سلم منتظم وزنه (و) على حائط رأسى أملس و ترتكز النهاية الأخرى على أرض خشنة تميل على الأفقى بزاوية قياسها (هـ) لأعلى فإذا كان السلم على وشك الانزلاق و هو فى مستوى رأسى عمودى على على خط تقاطع الحائط مع الأرض اثبت أن السلم يميل على الرأسى بزاوية قياسها θ حيث :

ظا θ = ٢ ظا (ى – هـ) حيث ى زاوية الاحتكاك

الحل

نفرض أن : طول القضيب = ل وحدة طول

، ∵ قياس زاوية الاحتكاك = ى

∴ م = $\frac{\text{حا ى}}{\text{حتا ى}}$

∵ السلم على وشك الانزلاق

∴ معادلات الاتزان هى :

$ر_{ب}$ حا هـ + $ر_{؏}$ = م $ر_{ب}$ حتا هـ

∴ $ر_{ب}$ حا هـ + $ر_{؏}$ = $\frac{\text{حا ى}}{\text{حتا ى}}$ × $ر_{ب}$ حتا هـ   بالضرب × حتا ى ينتج :

$ر_{؏}$ حتا ى = $ر_{ب}$ حا ى حتا هـ – $ر_{ب}$ حتا ى حا هـ

∴ $ر_{؏}$ حتا ى = $ر_{ب}$ حا (ى – هـ)   (١)

، و = $ر_{ب}$ حتا هـ + م $ر_{ب}$ حا هـ

∴ و = $ر_{ب}$ حتا هـ + $\frac{\text{حا ى}}{\text{حتا ى}}$ × $ر_{ب}$ حا هـ   بالضرب × حتا ى ينتج :

و حتا ى = $ر_{ب}$ حتا ى حتا هـ – $ر_{ب}$ حا هـ حا ى

∴ و حتا ى = $ر_{ب}$ حتا (ى – هـ)   (٢)

، $ع_ب$ = ٠

∴ و × ½ ل حا θ − $س_م$ × ل حتا θ = ٠   بالقسمة ÷ ل حتا θ ينتج :

و ظا θ = ٢ $س_م$ بالضرب × حتا ى ينتج :

و حتا ى ظا θ = ٢ $س_م$ حتا ى   بالتعويض من (١) ، (٢) ينتج :

$س_ب$ حتا (ى − هـ) ظا θ = ٢ $س_م$ حا (ى − هـ)

بالقسمة ÷ $س_ب$ حتا (ى − هـ) ينتج :

ظا θ = ٢ ظا (ى − هـ)

(٢) ثنى قضيب منتظم أ حـ طوله ١٥ ل من نقطة ب حيث أ ب = ٥ ل بحيث ق (∠ أ ب حـ) = ٩٠° و علق القضيب من الطرف أ تعليقاً حراً فاثبت أن ب حـ يميل على الأفقى بزاوية θ حيث ظا θ = $\frac{٤}{٥}$

الحل

∵ القضيب منتظم

∴ يمكن اعتباره مكون من القضيبين : أ ب ، ب حـ كل منهما منتظم و من نفس المادة

، ∵ أ ب = ٥ ل ، أ حـ = ١٥ ل   ∴ ب حـ = ١٠ ل

∴ أ ب : ب حـ = ١ : ٢

، ∵ الأوزان تتناسب مع الأطوال

∴ بفرض أن كتلة من القضيبين هما ك ، ٢ ك على الترتيب

و مركز ثقل كل منهما يؤثر عند منتصفه أى ء ، ى كما بالشكل المقابل

و بأخذ الاتجاهين المتعامدين ب حـ ، ب أ فيكون :

ى (٥ ل ، ٠) ، ء (٠ ، $\frac{٥}{٢}$ ل)

و نكون الجدول المقابل :

الكتلة	٢ ك	ك
س	٥ ل	٠
ص	٠	$\frac{٥}{٢}$ ل

∴ $س_م$ = $\frac{٢ ك × ٥ ل}{٣ ك}$ = $\frac{١٠}{٣}$ ل

، $ص_م$ = $\frac{ك × \frac{٥}{٢} ل}{٣ ك}$ = $\frac{٥}{٦}$ ل

∴ احداثى مركز الثقل = ($\frac{١٠}{٣}$ ل ، $\frac{٥}{٦}$ ل) بالنسبة لنقطة ب

أى أن : م ء = $\frac{١٠}{٣}$ ل ، م هـ = ب ء = $\frac{٥}{٦}$ ل

عند التعليق الحر من أ نجد أن أ م هو الخط الرأسى

و بفرض أن : ب حـ يصنع مع أ م زاوية قياسها θ

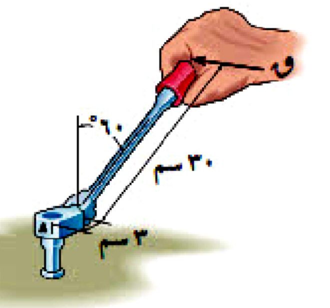
من هندسة الشكل نجد : أ ء = أ ب − ب ء = ٥ ل − $\frac{٥}{٦}$ ل = $\frac{٢٥}{٦}$ ل

∴ ظا θ = $\frac{\frac{٢٥}{٦} ل}{\frac{١٠}{٣} ل}$ = $\frac{٥}{٤}$

∴ ب حـ يميل على الأفقى بزاوية ظلها = ظا (٩٠° − θ) = ظتا θ = $\frac{٤}{٥}$

السؤال الخامس :

(أ) فى الشكل المقابل : إذا كان عزم القوة ق العمودية على ذراع الدوران بالنسبة لنقطة أ يساوى ٦٢٠ نيوتن . سم أوجد ق



الحل

∵ القوة عمودية على ذراع الدوران

∴ من هندسة الشكل : ب حـ ⊥ حـ ء ، أ ء ⊥ حـ ء

، ق (∠ أ هـ ب) = ٣٠°

، أ ء = ب حـ = حـ هـ + هـ ب

= ٣٠ + ٣ حتا ٣٠° = ٣٢,٦

، ∵ $ع_أ$ = ق × أ ء

∴ ٦٢٠ = ق × ٣٢,٦   و منها ينتج : ق = ١٩,٠٢ نيوتن

(٢) أ ب حـ مثلث متساوى الأضلاع طول ضلعه ٢٠ سم ، م نقطة تقاطع متوسطاته ، ء نقطة منتصف $\overline{\text{ب حـ}}$ ، ثبت كتل مقاديرها ١٥ ، ٣٠ ، ٧٥ ، ٤٥ ، ٤٥ فى النقط أ ، ب ، ء ، حـ ، م على الترتيب عين مركز ثقل هذه المجموعة ، و إذا رفعت الكتلة الموجودة عن ب فأين يقع مركز ثق المجموعة المتبقية

الحل

نختار اتجاهين متعامدين $\overrightarrow{\text{حـ س}}$ ، $\overrightarrow{\text{حـ ص}}$ كما بالشكل المقابل و ذلك باعتبار نقطة حـ نقطة أصل و من هندسة الشكل نجد :

أ ء = ٢٠ حا ٦٠° = $١٠\sqrt{٣}$ سم

فيكون : حـ (٠ ، ٠) ، ء (١٠ ، ٠) ، ب (٢٠ ، ٠) ، أ (١٠ ، $١٠\sqrt{٣}$) ، م (١٠ ، $\frac{١٠}{٣}\sqrt{٣}$)

و نكون جدول الكتل و احداثياتها كما يلى :

	عند حـ	عند ء	عند ب	عند أ	عند م
الكتلة	٤٥	٧٥	٣٠	١٥	٤٥
س	٠	١٠	٢٠	١٠	١٠
ص	٠	٠	٠	$١٠\sqrt{٣}$	$\frac{١٠}{٣}\sqrt{٣}$

$$\therefore \text{س}_\text{م} = \frac{١٠ \times ٤٥ + ١٠ \times ١٥ + ٢٠ \times ٣٠ + ١٠ \times ٧٥ + ٠ \times ٤٥}{٤٥ + ١٥ + ٣٠ + ٧٥ + ٤٥} = \frac{٦٥}{٧}$$

$$\text{، ص}_\text{م} = \frac{\sqrt{٣}\,\frac{١٠}{٣} \times ٤٥ + \sqrt{٣}\,١٠ \times ١٥ + ٠ \times ٣٠ + ٠ \times ٧٥ + ٠ \times ٤٥}{٤٥ + ١٥ + ٣٠ + ٧٥ + ٤٥} = \frac{١٠\sqrt{٣}}{٧}$$

∴ احداثى مركز الثقل = ($\frac{٦٥}{٧}$ ، $\frac{١٠\sqrt{٣}}{٧}$) بالنسبة للنقطة حـ

عند فصل الكتلة ٣٠ عند نقطة ب

نكون جدول الكتل و احداثياتها كما يلى :

	عند حـ	عند ء	عند أ	عند م
الكتلة	٤٥	٧٥	١٥	٤٥
س	٠	١٠	١٠	١٠
ص	٠	٠	$١٠\sqrt{٣}$	$\frac{١٠}{٣}\sqrt{٣}$

$$\therefore \text{س}_\text{م} = \frac{١٠ \times ٤٥ + ١٠ \times ١٥ + ١٠ \times ٧٥ + ٠ \times ٤٥}{٤٥ + ١٥ + ٧٥ + ٤٥} = \frac{١٥}{٢}$$

$$\text{، ص}_\text{م} = \frac{\sqrt{٣}\,\frac{١٠}{٣} \times ٤٥ + \sqrt{٣}\,١٠ \times ١٥ + ٠ \times ٧٥ + ٠ \times ٤٥}{٤٥ + ١٥ + ٧٥ + ٤٥} = \frac{٥\sqrt{٣}}{٧}$$

∴ احداثى مركز الثقل = ($\frac{١٥}{٢}$ ، $\frac{٥\sqrt{٣}}{٧}$) بالنسبة للنقطة حـ

حل آخر للجزء الثانى :

نكون جدول الكتل و احداثياتها كما يلى :

الكتلة	٢١٠	− ٣٠
س	$\frac{٦٥}{٧}$	٢٠
ص	$\frac{١٠\sqrt{٣}}{٧}$	٠

$$\therefore \text{س}_\text{م} = \frac{٢١٠ \times \frac{٦٥}{٧} - ٣٠ \times ٢٠}{٢١٠ - ٣٠} = \frac{١٥}{٢}$$

$$\text{، ص}_\text{م} = \frac{٢١٠ \times \frac{١٠\sqrt{٣}}{٧} - ٣٠ \times ٠}{٢١٠ - ٣٠} = \frac{٥\sqrt{٣}}{٧}$$

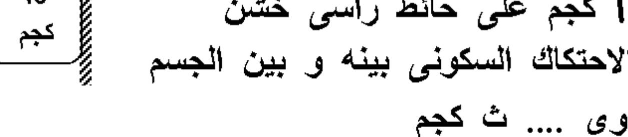
∴ احداثى مركز الثقل = ($\frac{١٥}{٢}$ ، $\frac{٥\sqrt{٣}}{٧}$) بالنسبة للنقطة حـ

الاختبار الثالث

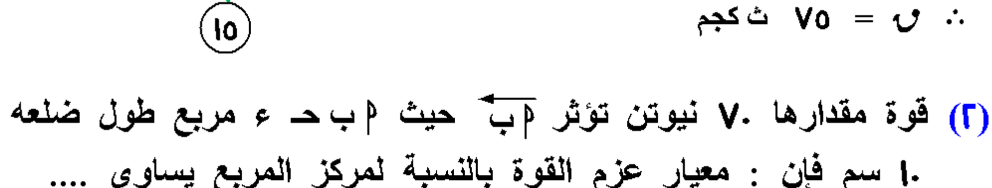
أولاً : أجب عن السؤال التالى :

السؤال الأول : أكمل ما يلي

(١) مقدار أقل قوة أفقية $\overleftarrow{ق}$ لازمة لاتزان جسم كتلته ١٥ كجم على حائط رأسى خشن معامل الاحتكاك السكونى بينه و بين الجسم $\frac{١}{٥}$ يساوى .... ث كجم



الحل



معادلتا الاتزان :

ق = ر ،

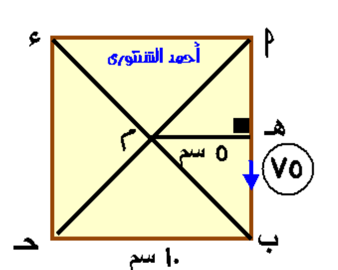
م س ر = ١٥

∴ $\frac{١}{٥}$ ر = ١٥ و منها : ر = ٧٥ ث كجم

∴ ق = ٧٥ ث كجم

(٢) قوة مقدارها ٧٠ نيوتن تؤثر $\overleftarrow{ﻫ ب}$ حيث ﻫ ب حـ ء مربع طول ضلعه ١٠ سم فإن : معيار عزم القوة بالنسبة لمركز المربع يساوى ....

الحل



من خواص المربع :

م هـ = ٥ سم

∴ ع م = ٧٠ × ٥ = ٣٥٠ نيوتن . سم

(٣) إذا كانت : $\overleftarrow{ق_١}$ // $\overleftarrow{ق_٢}$ ، $\overleftarrow{ق_١}$ = $\overleftarrow{س}$ − ٢ $\overleftarrow{ص}$ ، || $\overleftarrow{ق_٢}$ || = ٤ $\sqrt{٥}$ وحدة فإن : $\overleftarrow{ق_٢}$ = ...

الحل

∵ $\overleftarrow{ق_١}$ // $\overleftarrow{ق_٢}$ ∴ $\overleftarrow{ق_٢}$ = ك $\overleftarrow{ق_١}$ = (ك ، − ٢ ك)

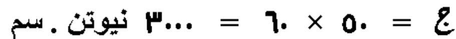
∴ || $\overleftarrow{ق_٢}$ || = || (ك ، − ٢ ك) ||

∴ ٤ $\sqrt{٥}$ = | ك | $\sqrt{٥}$ ∴ | ك | = ٤

∴ ك = ± ٤ ∴ $\overleftarrow{ق_٢}$ = ± ٤ (١ ، − ٢)

(٤) فى الشكل المقابل :

عزم الازدواج الناتج من القوتين ٥٠ ، ٥٠ نيوتن يساوى ....



الحل

ع = ٥٠ × ٦٠ = ٣٠٠٠ نيوتن . سم

(٥) عندما يوضع قضيب داخل أناء كروى أملس فإنه يتزن عندما يمر خط عمل الوزن ....

الحل

بمركز الأناء (الكرة)

(٦) مركز ثقل الصفيحة المنتظمة المثلثة الشكل يقع عند ....

الحل

نقطة تقاطع المتوسطات

ثانياً : أجب عن ثلاثة أسئلة فقط مما يلى :

السؤال الثانى :

(أ) وضع جسم وزنه ٦٤ نيوتن على مستوى أفقى خشن معامل الاحتكاك بينهما يساوى ٣/٤ ، أثرت على الجسم قوة مقدارها ٤٠ نيوتن و تميل على الأفقى بزاوية قياسها θ ، فإذا كان الجسم على وشك الحركة فما قيمة θ

الحل

∵ الجسم على وشك الحركة

∴ معادلتا الأتزان هما :

م_س ر = ٤٠ حتا θ

∴ ٣/٤ ر = ٤٠ حتا θ (١)

، ر + ٤٠ حا θ = ٦٤ (٢) × ٣/٤ ينتج :

٣/٤ ر + ٣٠ حا θ = ٤٨ ، بالتعويض من (١) ينتج :

٤٠ حتا θ + ٣٠ حا θ = ٤٨ ÷ ٢ ينتج : ٢٠ حتا θ + ١٥ حا θ = ٢٤

∴ ٢٠ حتا θ = ٢٤ − ١٥ حا θ بالتربيع ينتج :

٤٠٠ حتا² θ = ٥٧٦ − ٧٢٠ حا θ + ٢٢٥ حا² θ

٤٠٠ (١ − حا² θ) = ٥٧٦ − ٧٢٠ حا θ + ٢٢٥ حا² θ

∴ ٤٠٠ − ٤٠٠ حا² θ = ٥٧٦ − ٧٢٠ حا θ + ٢٢٥ حا² θ

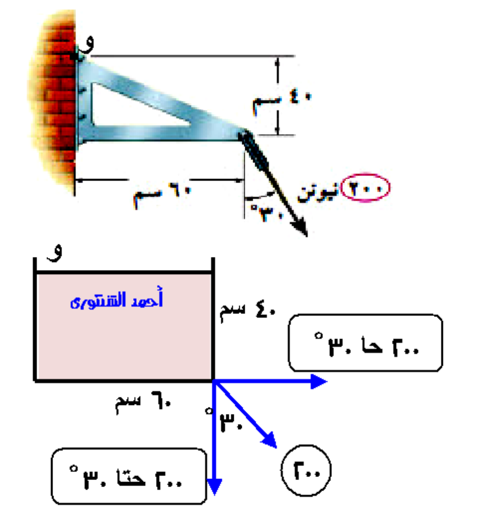
∴ ٦٢٥ حا² θ − ٧٢٠ حا θ + ١٧٦ = ٠

∴ (١٢٥ حا θ − ٤٤) (٥ حا θ − ٤) = ٠

∴ حا θ = ٤٤/١٢٥ ∴ θ = ٢٠,٦١°

أ، حا θ = ٤/٥ ∴ θ = ٥٣,١٣° (ملاحظة : توجد حلول أخرى)

(٢) فى الشكل المقابل : أوجد عزم القوة ٢٠٠ نيوتن بالنسبة لنقطة و



الحل

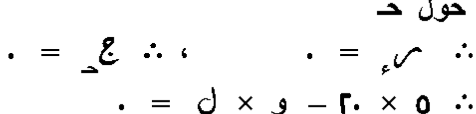
ع_و = ٢٠٠ حا ٣٠° × ٤٠ − ٢٠٠ حتا ٣٠° × ٦٠

= − ٦٣٩٢,٣ نيوتن . سم

السؤال الثالث :

(أ) أ ب قضيب غير منتظم طوله ١ متر يرتكز فى وضع أفقى على حاملين عند حـ ، ء حيث أ حـ = ٢٠ سم ، ب ء = ١٠ سم إذا كان أكبر ثقل يمكن تعليقه من نقطة أ أو من نقطة ب دون أن يختل توزان القضيب هو ٥ ، ٤ ث كجم على الترتيب أوجد وزن القضيب

الحل



نفرض أن : وزن القضيب يؤثر عند نقطة تبعد عن حـ مسافة = ل سم

عند تعليق ثقل ٥ كجم من أ فإن القضيب يصبح على وشك الدوران حول حـ

∴ ر_ء = ٠ ، ∴ ع_حـ = ٠

∴ ٥ × ٢٠ − و × ل = ٠

∴ و ل = ١٠٠ (١)

عند تعليق ثقل ٤ كجم من ب فإن القضيب يصبح على وشك الدوران حول ء

∴ $ر_ح$ = ٠ ، ∴ $ع_ح$ = ٠

∴ ٤ × ١٠ − و × (٧٠ − ل) = ٠

∴ ٤٠ − ٧٠ و + و ل = ٠ بالتعويض من (١) ينتج :

∴ ٧٠ و = ٤٠ + ١٠٠ و منها : و = ٢ ث كجم

، بالتعويض فى (١) ينتج : ل = ٥٠ سم

أى أن : وزن القضيب ٢ ث كجم معلق من نقطة على بعد ٧٠ سم من نقطة ٩

(٢) ٩ ب حـ ء هـ و مسدس منتظم طول ضلعه ١٠ سم أثرت قوى مقاديرها ٢ ، ٥ ، ٤ ، ٦ ، ١ ، ٣ نيوتن فى ٩ب ، حـ ب ، حـ ء ، هـ ء ، هـ و ، ٩ و على الترتيب اوجد مقدار و اتجاه القوة التى يجب أن تؤثر فى مركز المسدس حتى تؤول المجموعة إلى ازدواج ثم عين عزمه

الحل

نفرض س ، ص متجها وحدة في اتجاه م حـ و العمودى عليه

و بتحليل القوى كما بالشكل المقابل ينتج :

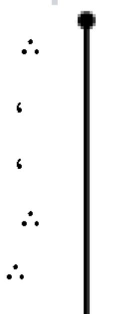
س = ٢ + ٦ − ٣ حتا ٦٠° − ١ حتا ٦٠° − ٤ حتا ٦٠° − ٥ حتا ٦٠°

= ٨ − ١٣ حتا ٦٠° = ٣/٢

ص = ٣ حا ٦٠° − ١ حا ٦٠° − ٥ حا ٦٠° + ٤ حا ٦٠° = √٣ / ٢

∴ ع = ٣/٢ س + √٣/٢ ص ، ∵ المجموعة تؤول إلى ازدواج

∴ ق = − ع = − ٣/٢ س − √٣/٢ ص



∴ ‖ ق ‖ = √٣ نيوتن ، طا θ = ١ / √٣

، ∵ س < ٠ ، ص < ٠ ∴ θ = ١٨٠° − ٣٠° = ٢١٠°

، خواص المسدس المنتظم : م ى = ½ ٩ ب طا ٦٠° = ٥ √٣ سم

∴ البعد العمودى بين مركز المسدس و أضلاعه = ٥ √٣ سم

∴ $ع_م$ = (٢ − ٥ + ٤ − ٦ + ١ − ٣) × ٥ √٣

= − ٣٥ √٣ نيوتن . سم

السؤال الرابع :

(١) ٩ ب قضيب منتظم وزنه (و) يرتكز باحدى طرفيه ٩ على أرض أفقية ملساء و بطرفه الآخر ب على مستوى أملس يميل على الأفقى بزاوية قياسها يساوى ضعف قياس زاوية ميل القضيب على الأفقى فى وضع الاتزان حفظ اتزان القضيب بواسطة خيط مربوط فى طرف المستند على الأرض الأفقية و الطرف الآخر للخيط فى نقطة على خط تقاطع المستوى المائل مع المستوى الأفقى اوجد مقدار الشد فى الخيط و ردى الفعل عند طرفى القضيب عندما يميل القضيب على الأفقى بزاوية قياسها ٣٠°

الحل

نفرض أن : طول القضيب = ل وحدة طول

، ∵ القضيب متزن

∴ ش = $ر_ب$ حتا ٣٠° = √٣/٢ $ر_ب$ (١)

، $ر_٩$ + $ر_ب$ حا ٣٠° = و

∴ $ر_٩$ + ½ $ر_ب$ = و (٢)

، $ع_٩$ = ٠

∴ و × ½ ل حتا ٣٠° = $ر_ب$ حتا ٣٠° × ل حا ٣٠° + $ر_ب$ حا ٣٠° × ل حتا ٣٠°

بالقسمة على ل حتا ٣٠° ينتج : $\frac{١}{٢}$ و = $\frac{١}{٢}$ $ر_ب$ + $\frac{١}{٢}$ $ر_ب$

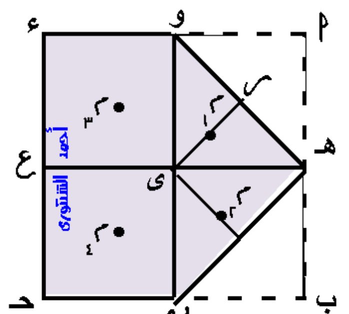
∴ $ر_ب$ = $\frac{١}{٢}$ و   بالتعويض من (٢) ينتج :

$ر_ا$ + $\frac{١}{٤}$ و = و   و منها : $ر_ا$ = $\frac{٣}{٤}$ و

، بالتعويض من (١) ينتج : ش = $\frac{\sqrt{٣}}{٤}$ و

(٢) صفيحة رقيقة منتظمة على شكل مربع طول ضلعه ل فإذا كان هـ ، و ، ن منتصفات $\overline{اب}$ ، $\overline{اء}$ ، $\overline{بحـ}$ على الترتيب ، ثنى المثلث ا هـ و حول الضلع $\overline{هـو}$ بحيث انطبقت ا على مركز المربع ى و ثنى المثلث ب هـ ن على الضلع $\overline{هـن}$ بحيث أنطبق الرأس ب على مركز المربع ى ، عين مركز ثقل الصفيحة فى وضعها الجديد

الحل



نأخذ الاتجاهين المتعامدين $\overleftarrow{ىهـ}$ ، $\overleftarrow{ىو}$

∵ الصفيحة رقيقة منتظمة

∴ يمكن اعتبارها مكونة من ٤ أجزاء كما بالشكل

من هندسة الشكل :

$ى م_١$ = $\frac{٢}{٣}$ ى ر = $\frac{٢}{٣}$ × $\frac{١}{٢}$ ى ا

= $\frac{١}{٣}$ × $\frac{١}{٢}\sqrt{٢}$ ل = $\frac{١}{٦}\sqrt{٢}$ ل

∴ $م_١$ = ($\frac{١}{٦}\sqrt{٢}$ ل حتا ٤٥° ، $\frac{١}{٦}\sqrt{٢}$ ل حا ٤٥°) = ($\frac{١}{٦}$ ل ، $\frac{١}{٦}$ ل)

، بالمثل : $م_٢$ = ($\frac{١}{٦}$ ل ، − $\frac{١}{٦}$ ل) ، $م_٣$ = (− $\frac{١}{٤}$ ل ، $\frac{١}{٤}$ ل)

، $م_٤$ = (− $\frac{١}{٤}$ ل ، − $\frac{١}{٤}$ ل) ، بفرض أن : كتلة الصفيحة = ٤ ك

∴ كتلة الصفيحة المثلثة و هـ ى المكونة من طبقتين = ك ، و مركزها $م_١$

، كتلة الصفيحة المثلثة ن هـ ى المكونة من طبقتين = ك ، و مركزها $م_٢$

، كتلة الصفيحة المربعة و ى ع ء = ك ، و مركزها $م_٣$

، كتلة الصفيحة المربعة ى ن حـ ع = ك ، و مركزها $م_٤$

و نكون الجدول التالى :

الكتلة	ك	ك	ك	ك
س	$\frac{١}{٦}$ ل	$\frac{١}{٦}$ ل	− $\frac{١}{٤}$ ل	− $\frac{١}{٤}$ ل
ص	$\frac{١}{٦}$ ل	− $\frac{١}{٦}$ ل	$\frac{١}{٤}$ ل	− $\frac{١}{٤}$ ل

∴ $س_م = \frac{ك \times \frac{١}{٦}ل + ك \times \frac{١}{٦}ل - ك \times \frac{١}{٤}ل - ك \times \frac{١}{٤}ل}{٤ك} = -\frac{١}{٢٤}ل$

، $ص_م = \frac{ك \times \frac{١}{٦}ل - ك \times \frac{١}{٦}ل + ك \times \frac{١}{٤}ل - ك \times \frac{١}{٤}ل}{٤ك} =$ صفر

∴ احداثى مركز الثقل = (− $\frac{١}{٢٤}$ ل ، ٠) بالنسبة لمركز الصفيحة

حل آخر :

يمكن اعتبار الصفيحة مكون من ٣ أجزاء

الصفيحة المثلثة و هـ ى المكونة من طبقتين و كتلتها = ك ، و مركزها $م_١$ ،

الصفيحة المثلثة ن هـ ى المكونة من طبقتين و كتلتها = ك ، و مركزها $م_٢$ ،

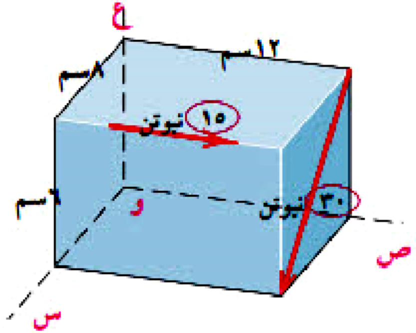
الصفيحة المستطيلة و ء حـ ن ، و كتلتها = ٢ ك ، و مركزها (٠ ، − $\frac{١}{٤}$ ل)

السؤال الخامس :

(ا) فى الشكل المقابل :

أوجد مجموع عزوم القوى بالنسبة للنقطة و

الحل



من هندسة الشكل نجد أن :

أ (٨ ، ٠ ، ٦) ، ب (٨ ، ١٢ ، ٦) ،
حـ (٨ ، ١٢ ، ٠) ، ء (٠ ، ١٢ ، ٦)

∴ $\overleftarrow{\text{أب}}$ = (٨ ، ١٢ ، ٦) − (٨ ، ٠ ، ٦)
= (٠ ، ١٢ ، ٠)

∴ $\|\overleftarrow{\text{أب}}\|$ = ١٢

، $\overleftarrow{\text{ق}}_{1}$ = $\text{ق}_{1}\left(\dfrac{\overleftarrow{\text{أب}}}{\|\overleftarrow{\text{أب}}\|}\right)$

= ١٥ × ($\dfrac{(\text{٠ ، ١٢ ، ٠})}{\text{١٢}}$) = (٠ ، ١٥ ، ٠)

، $\overleftarrow{\text{ءحـ}}$ = (٨ ، ١٢ ، ٠) − (٠ ، ١٢ ، ٦) = (٨ ، ٠ ، −٦)

∴ $\|\overleftarrow{\text{ءحـ}}\|$ = ١٠

، $\overleftarrow{\text{ق}}_{2}$ = $\text{ق}_{2}\left(\dfrac{\overleftarrow{\text{ءحـ}}}{\|\overleftarrow{\text{ءحـ}}\|}\right)$

= ٣٠ × ($\dfrac{(\text{٨ ، ٠ ، −٦})}{\text{١٠}}$) = (٢٤ ، ٠ ، −١٨)

∴ $\overleftarrow{\text{جـ}}$ = $\overleftarrow{\text{وأ}}$ × $\overleftarrow{\text{ق}}_{1}$ + $\overleftarrow{\text{وء}}$ × $\overleftarrow{\text{ق}}_{2}$

$$= \begin{vmatrix} \overleftarrow{\text{س}} & \overleftarrow{\text{ص}} & \overleftarrow{\text{ع}} \\ ٨ & ٠ & ٦ \\ ٠ & ١٥ & ٠ \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \overleftarrow{\text{س}} & \overleftarrow{\text{ص}} & \overleftarrow{\text{ع}} \\ ٠ & ١٢ & ٦ \\ ٢٤ & ٤ & ١٨- \end{vmatrix}$$

= −٩٠ $\overleftarrow{\text{س}}$ + ١٢٠ $\overleftarrow{\text{ع}}$ − ٢١٦ $\overleftarrow{\text{س}}$ − ١٤٤ $\overleftarrow{\text{ص}}$ − ٢٨٨ $\overleftarrow{\text{ع}}$

= −٣٠٦ $\overleftarrow{\text{س}}$ − ١٤٤ $\overleftarrow{\text{ص}}$ − ١٦٨ $\overleftarrow{\text{ع}}$

---

(٢) اوجد مركز ثقل التوزيع التالى :

و_{1} = ٢٠ نيوتن و يؤثر فى (٢ ، ١) ،

و_{2} = ١٥ نيوتن و يؤثر فى (− ٣ ، ١)

و_{3} = ٢٥ نيوتن و يؤثر فى (١ ، − ١)

الحل

الكتلة	و_{1}	و_{2}	و_{3}
الكتلة	٢٠	١٥	٢٥
س	٢	− ٣	١
ص	١	١	− ١

∴ $\text{س}_{م}$ = $\dfrac{\text{٢٠} \times \text{٢} - \text{١٥} \times \text{٣} + \text{٢٥} \times \text{١}}{\text{٢٠} + \text{١٥} + \text{٢٥}}$ = $\dfrac{١}{٣}$

، $\text{ص}_{م}$ = $\dfrac{\text{٢٠} \times \text{١} + \text{١٥} \times \text{١} - \text{٢٥} \times \text{١}}{\text{٢٠} + \text{١٥} + \text{٢٥}}$ = $\dfrac{١}{٦}$

∴ احداثى مركز الثقل = ($\dfrac{١}{٣}$ ، $\dfrac{١}{٦}$)

احداثى مركز الثقل = ($\dfrac{٤٠٧}{٧٢}$ ، $\dfrac{١٥٥}{٧٢}$)

الاختبار الرابع

أولاً : أجب عن السؤال التالى :

السؤال الأول : أختر الاجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة

(١) معامل الاحتكاك يتوقف على ....

(أ) مساحة سطح التلامس بين الجسمين (ب) شكل الجسمين
(حـ) طبيعة الجسمي (ء) كل ما سبق

الحل

طبيعة الجسمين

(٢) الشكل المقابل يمثل قضيب منتظم يرتكز على حامل عند منتصفه وضع عليه جسم كما بالشكل أى من القوى الآتية تحدث توازن القضيب

١٠ سم　٢٠

(أ) قوة مقدارها ١٠ نيوتن لأعلى تؤثر على بعد ٢٠ سم على يمين منتصف القضيب

(ب) قوة مقدارها ١٠ نيوتن لأسفل تؤثر على بعد ٢٠ سم على يمين منتصف القضيب

(حـ) قوة مقدارها ٣٠ نيوتن لأعلى تؤثر على بعد ٥ سم على يسار منتصف القضيب

(ء) قوة مقدارها ٣٠ نيوتن لأسفل تؤثر على بعد ٥ سم على يسار منتصف القضيب

الحل

بفرض أن : قوة مقدارها ق نيوتن لأسفل تؤثر على على بعد ل سم على يمين منتصف القضيب ، ∵ القضيب متزن

∴ ع~حـ~ = ٠　∴ ٢٠ × ١٠ − ق × ل = ٠

∴ ق × ل = ٢٠٠　و لكى يتحقق ذلك يجب أن يكون مقدار القوة ١٠ نيوتن و تؤثر لأسفل على بعد ٢٠ سم على يمين منتصف القضيب

(٣) أثرت قوة $\overleftarrow{ق} = ق_{س}\overleftarrow{س} + ق_{ص}\overleftarrow{ص} + ق_{ع}\overleftarrow{ع}$ فى نقطة أ متجه موضعها بالنسبة لنقطة الأصل هو $أ_{س}\overleftarrow{س} + أ_{ص}\overleftarrow{ص} - أ_{ع}\overleftarrow{ع}$ فإن مركبة عزم $\overleftarrow{ق}$ حول محور س هى .....

(أ) $ق_{س} \times أ_{ع} - ق_{ع} \times أ_{س}$　　(ب) $ق_{ع} \times أ_{ص} + ق_{ص} \times أ_{ع}$

(حـ) $ق_{س} \times أ_{ص} + ق_{ص} \times أ_{س}$　　(ء) $ق_{ص} \times أ_{ص} + ق_{ع} \times أ_{ع}$

الحل

$ق_{ع} \times أ_{س} + ق_{س} \times أ_{ع}$

(٤) عزم الازدواج المقابل يساوى ....

١٠ نيوتن　٦٠°　٨٠ سم　١٠ نيوتن

(أ) ٨٠٠ نيوتن . سم　　(ب) ٨٠ نيوتن . سم

(حـ) $٤٠٠\sqrt{٣}$ نيوتن . سم　　(ء) $٤٠\sqrt{٣}$ نيوتن . سم

الحل

ع = ١٠ × ٨٠ حا ٦٠° = $٤٠٠\sqrt{٣}$ نيوتن . سم

(٥) فى الشكل المقابل :

إذا كان القضيب على وشك الانزلاق فإن :

$ر_{1}$ = ...　،　$ر_{2}$ = ...

(أ) ٢ و　　(ب) $\frac{1}{2}$ و

(حـ) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ و　　(ء) $\frac{\sqrt{٣}}{٣}$ و

الحل

∵ القضيب متزن

∴ $ر_{1}$ حا ٦٠° + $ر_{2}$ = و

∴ $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ $ر_{1}$ حا ٦٠° + $ر_{2}$ = و　(١)

، م $ر_{2}$ = $ر_{1}$ حتا ٦٠°

∴ م $ر_{2}$ = $\frac{1}{2}$ $ر_{1}$　(٢)

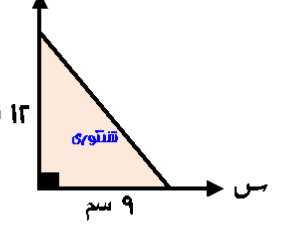
، ع$_{م}$ = ٠

∴ ر$_{١}$ حا ٦٠° × ٣ ل حتا ٣٠° + ر$_{١}$ حتا ٦٠° × ٣ ل حا ٣٠° −

و ٢ × ل حا ٣٠° = ٠ و منها : ر$_{١}$ = $\frac{\sqrt{٣}}{٣}$ و

بالتعويض فى (١) ينتج : ر$_{١}$ = $\frac{١}{٢}$ و

(٦) مركز ثقل الصفيحة المظللة فى الشكل المقابل هو ....



(أ) (٣ ، ٤) (ب) (٤ ، ٣)

(جـ) (٦ ، ٨) (د) (٨ ، ٦)

الحل

من الشكل تكون احداثيات رؤوس الصفيحة هى :

(٠ ، ٠) ، (٩ ، ٠) ، (٠ ، ١٢) ، ∵ الصفيحة مثلثة الشكل

∴ مركز ثقل الصفيحة يقع عند نقطة تلاقى المتوسطات

∴ احداثى مركز الثقل = ($\frac{٠ + ٩ + ٠}{٣}$ ، $\frac{٠ + ٠ + ١٢}{٣}$) = (٣ ، ٤)

ثانياً : أجب عن ثلاثة أسئلة فقط مما يلى :

السؤال الثانى :

(أ) وضع جسم وزنه ١٦ ث كجم على مستوى يميل على الأفقى بزاوية قياسها ٣٠° و معامل الاحتكاك بينه و بين الجسم يساوى $\frac{١}{\sqrt{٣}}$ اثرت على الجسم قوة تعمل فى خط أكبر ميل للمستوى و لأعلى مقدارها ١٠ ث كجم فإذا كان الجسم متزناً عين قوة الاحتكاك و بين ما إذا كان الجسم على وشك الحركة أو لا ؟

الحل

∴ القضيب متزن ∴ معادلات اتزان هى :

١٠ = ع + ١٦ حا ٣٠°

∴ ١٠ = ع + ١٦ × $\frac{١}{٢}$

و منها : ع = ٢

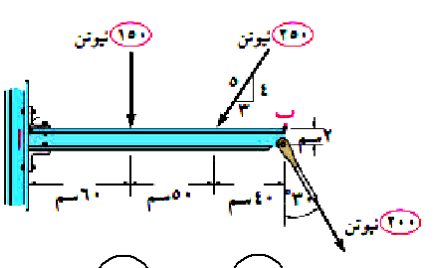
، ر = ١٦ حتا ٣٠°

∴ ر = ١٦ × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ = ٨$\sqrt{٣}$

∴ م ر = $\frac{١}{\sqrt{٣}}$ × ٨$\sqrt{٣}$ = ٨

∴ م ر > ع ∴ الجسم متزن و ليس على وشك الحركة

(٢) فى الشكل المقابل : ثلاث قوى مستوية تؤثر فى القضيب أ ب اوجد القياسات الجبرية لمجموع عزوم القوى بالنسبة لكل من النقطتين أ ، ب



الحل

ع$_{أ}$ = − ١٥٠ × ٦٠ − ٢٥٠ حا θ × ١١٠

− ٢٠٠ حتا ٣٠° × ١٥٠

+ ٢٠٠ حا ٣٠° × ٢

= − ٩٠٠٠ − ٢٥٠ × $\frac{٤}{٥}$ × ١١٠

− ٢٠٠ × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ × ١٥٠

+ ٢٠٠ × $\frac{١}{٢}$ × ٢ = − ٣٠٨٠٠ − ١٥٠٠٠$\sqrt{٣}$ نيوتن . سم

ع$_{ب}$ = ١٥٠ × ٩٠ + ٢٥٠ حا θ × ٤٠ + ٢٠٠ حا ٣٠° × ٢

= ١٥٠ × ٩٠ + ٢٥٠ × $\frac{٤}{٥}$ × ٤٠ + ٢٠٠ × $\frac{١}{٢}$ × ٢

= ٢١٧٠٠ نيوتن . سم

السؤال الثالث :

(١) قضيب منتظم طوله ٤ متر يرتكز على نقطة ارتكاز عند منتصفه علق ثقلان ٤ ، ٣ ث كجم فى احدى نصفيه و على بعد ١ ، ١,٥ متر من منتصفه على الترتيب و علق ثقلان ٥ ، و ث كجم فى النصف الآخر و على بعد $\frac{1}{2}$ ، ٢ متر من منتصفه على الترتيب فإذا اتزن القضيب اوجد قيمة و

الحل

∵ القضيب متزن

∴ ع$_{حـ}$ = ٠

∴ ٣ × $\frac{3}{2}$ + ٤ × ١ − ٥ × $\frac{1}{2}$ − و × ٥ = ٠ و منها : و = ٣ ث كجم

(٢) أ ب حـ صفيحة منتظمة على شكل مثلث متساوى الأضلاع طول ضلعه ٣٠ $\sqrt{3}$ سم ، و وزنها ٥٠ ث جم علقت الصفيحة من مسمار أفقى من بالقرب من الرأس أ فاتزنت رأسياً اثر على الصفيحة ازدواج عمودى على مستوى الصفيحة فاتزنت الصفيحة فى وضع يكون فيه أ ب أفقياً اوجد عزم الازدواج المؤثر و رد الفعل على المسمار

الحل

∵ الصفيحة متزنة تحت تأثير ع ، ر ، ٥٠

∴ القوتان (ر ، ٥٠) تكونان ازدواجاً

، ∵ (٥٠) يؤثر رأسياً لأسفل

∴ ر = ٥٠ ث جم و يؤثر رأسياً لأعلى

، ع = ٥٠ × أ ء = ٥٠ × ١٥ $\sqrt{3}$ = ٧٥٠ $\sqrt{3}$ ث جم . سم

السؤال الرابع :

(١) أ ب قضيب منتظم طرفه أ مثبت فى مفصل فى حائط رأسى و طرفه الآخر ب مربوط بأحد طرفى خيط ، و ربط الطرف الآخر للخيط فى نقطة فى المستوى الأفقى المار بالمفصل بحيث يميل كل من القضيب و الخيط على الأفقى بنفس الزاوية θ فإذا كان (و) وزن القضيب ، بين أن رد فعل المفصل عند أ يساوى $\frac{1}{4}$ و $\sqrt{8 + \text{قتا}^2\theta}$

الحل

نفرض أن :

طول القضيب = ل وحدة طول

، مقدار مركبتى رد فعل المفصل عند أ هما : س$_1$ ، ص$_1$

من هندسة الشكل :

أ ء = أ ب حا ٢θ = ٢ ل حا θ حتا θ

∴ أ حـ = أ ء قتا θ = ٢ ل حا θ حتا θ قتا θ

= ٢ ل حتا θ ، أ هـ = $\frac{1}{2}$ ل حتا θ

∴ معادلات الاتزان هى :

س$_1$ = شـ حتا θ (١)

ص$_1$ = و − شـ حا θ (٢)

، ع$_{أ}$ = ٠ ∴ شـ حا θ × أ حـ − و × أ هـ = ٠

∴ شـ حا θ × ٢ ل حتا θ − و × $\frac{1}{2}$ ل حتا θ = ٠

و منها : شـ = $\frac{١}{٤}$ و قتا θ ، بالتعويض فى (١) ، (٢) ينتج :

سـ١ = $\frac{١}{٤}$ و طتا θ ، ص١ = $\frac{٣}{٤}$ و

∴ (ر)٢ = (سـ١)٢ + (ص١)٢ = $\frac{١}{١٦}$ و٢ طتا٢ θ + $\frac{٩}{١٦}$ و٢

= $\frac{١}{١٦}$ و٢ (طتا٢ θ + ٩) = $\frac{١}{١٦}$ و٢ (طتا٢ θ + ١ + ٨)

= $\frac{١}{١٦}$ و٢ (قتا٢ θ + ٨) ∴ ر = $\frac{١}{٤}$ و $\sqrt{٨ + قتا^٢ θ}$

(٢) أ ب حـ ء مربع طول ضلعه ٢٠ سم ، وضعت كتل متساوية المقدار عند رؤوسه ، أولاً : عين مركز ثقل المجموعة

ثانياً : إذا رفعت الكتلة الموجودة عند أحد رؤوسه فأين يقع مركز المجموعة المتبقية

(شكل: مربع أ ب حـ ء طول ضلعه ٢٠ سم وعند كل رأس كتلة ك)

الحـــل

باخذ الاتجاهين المتعامدين أب ، أء

و بفرض أن كل كتلة عند كل رأس = ك فيكون :

أ (٠ ، ٠) ، ب (٢٠ ، ٠) ، حـ (٢٠ ، ٢٠)

، ء (٠ ، ٢٠)

أولاً : جدول الكتل كما يلى :

	عند أ	عند ب	عند حـ	عند ء
الكتلة	ك	ك	ك	ك
س	٠	٢٠	٢٠	٠
ص	٠	٠	٢٠	٢٠

$$سـ_م = \frac{ك × ٠ + ك × ٢٠ + ك × ٢٠ + ك × ٠}{٤ ك} = ١٠$$

$$، صـ_م = \frac{ك × ٠ + ك × ٠ + ك × ٢٠ + ك × ٢٠}{٤ ك} = ١٠$$

∴ احداثى مركز الثقل = (١٠ ، ١٠) بالنسبة لنقطة أ

ثانياً : عند رفع الكتلة عند الرأس حـ يكون :

(شكل: مربع أ ب حـ ء طول ضلعه ٢٠ سم وعند الرؤوس أ ، ب ، ء كتلة ك)

	عند أ	عند ب	عند ء
الكتلة	ك	ك	ك
س	٠	٢٠	٠
ص	٠	٠	٢٠

$$سـ_م = \frac{ك × ٠ + ك × ٢٠ + ك × ٠}{٣ ك} = \frac{٢٠}{٣}$$

$$، صـ_م = \frac{ك × ٠ + ك × ٠ + ك × ٢٠}{٤ ك} = \frac{٢٠}{٣}$$

∴ احداثى مركز الثقل = ($\frac{٢٠}{٣}$ ، $\frac{٢٠}{٣}$) بالنسبة لنقطة أ

حل آخر لثانياً :

مركز ثقل المجموعة المكونة من ٤ كتل عند كل رأس من رؤوس المربع يؤثر عند مركز المربع (نقطة تقاطع القطرين) و كتلته = ٤ ك

حيث احداثيات المركز (١٠ ، ١٠)

و الكتلة التى رفعت من الرأس حـ (٢٠ ، ٢٠) = − ك (اكمل بنفسك)

السؤال الخامس :

(١) أ ب حـ صفيحة مثلثة الشكل متساوية الأضلاع كتلتها ٣ كجم ، م مركز ثقلها وضعت كتل مقاديرها ٢ ، ٢ ، ١١ كجم عند الرؤوس أ ، ب ، حـ على الترتيب برهن أن مركز ثقل المجموعة يقع عند نقطة منتصف م حـ

الحـــل

نفرض أن : طول ضلع الصفيحة = ل

من هندسة الشكل :

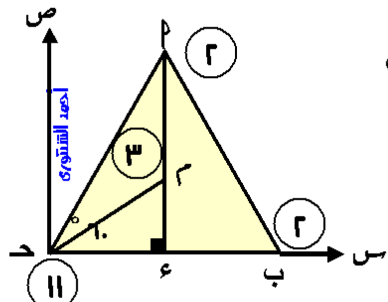
، $\text{أ ء} = \text{ل حا } ٦٠^\circ$ ،

$\text{م ء} = \frac{١}{٣}\ \text{أ ء} = \frac{١}{٣}\ \text{ل حا } ٦٠^\circ = \frac{\sqrt{٣}}{٦}\ \text{ل}$

، $\text{حـ ء} = \frac{١}{٢}\ \text{ل}$

و بأخذ الاتجاهين المتعامدين $\overleftarrow{\text{حـ س}}$ ، $\overleftarrow{\text{حـ ص}}$

فيكون جدول الكتل و احداثياتها كما يلى :



	عند حـ	عند ب	عند أ	عند م
الكتلة	١١	٢	٢	٣
س	٠	ل	$\frac{١}{٢}$ ل	$\frac{١}{٢}$ ل
ص	٠	٠	$\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ل	$\frac{\sqrt{٣}}{٦}$ ل

$$\therefore\ \text{س}_\text{م} = \frac{١١ \times ٠ + ٢ \times \text{ل} + ٢ \times \frac{١}{٢}\text{ل} + ٣ \times \frac{١}{٢}\text{ل}}{١١ + ٢ + ٢ + ٣} = \frac{١}{٤}\ \text{ل}$$

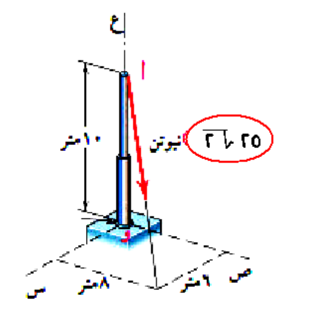
$$،\ \text{ص}_\text{م} = \frac{١١ \times ٠ + ٢ \times ٠ + ٢ \times \frac{\sqrt{٣}}{٢}\text{ل} + ٣ \times \frac{\sqrt{٣}}{٦}\text{ل}}{١١ + ٢ + ٢ + ٣} = \frac{\sqrt{٣}}{١٢}\ \text{ل}$$

، $\because$ احداثى منتصف $\overline{\text{م حـ}} = \left(\frac{١}{٤}\ \text{ل} \ ،\ \frac{\sqrt{٣}}{١٢}\ \text{ل} \right)$

$\therefore$ مركز ثقل المجموعة يقع عند نقطة منتصف $\overline{\text{م حـ}}$

(٢) فى الشكل المقابل :
تؤثر قوة مقدارها ٥٠ نيوتن
فى نقطة أ
اوجد عزم القوة بالنسبة للنقطة و

الحل



من هندسة الشكل نجد أن :

أ (٠ ، ٠ ، ١٠) ، ب (٦ ، ٨ ، ٠) ،

$\therefore\ \overleftarrow{\text{أ ب}} = (٦ ، ٨ ، ٠) - (٠ ، ٠ ، ١٠) = (٦ ، ٨ ، -١٠)$

$\therefore\ \| \overleftarrow{\text{أ ب}} \| = ١٠\sqrt{٢}$

، $\overleftarrow{\text{ق}} = \text{ق} \left(\frac{\overleftarrow{\text{أ ب}}}{\| \overleftarrow{\text{أ ب}} \|} \right)$

$$= ٢٥\sqrt{٢} \times \left(\frac{(٦ ، ٨ ، -١٠)}{١٠\sqrt{٢}} \right) = (١٥ ، ٢٠ ، -٢٥)$$

$$\therefore\ \overleftarrow{\text{جـ}}_\text{و} = \overleftarrow{\text{و أ}} \times \overleftarrow{\text{ق}} = \begin{vmatrix} \overleftarrow{\text{س}} & \overleftarrow{\text{ص}} & \overleftarrow{\text{ع}} \\ ٠ & ٠ & ١٠ \\ ١٥ & ٢٠ & -٢٥ \end{vmatrix} = ٢٠٠\ \overleftarrow{\text{س}} + ١٢٠\ \overleftarrow{\text{ص}}$$

الاختبار الخامس

أولاً : أجب عن السؤال التالى :

السؤال الأول : أكمل ما يلى :

(١) معامل الاحتكاك السكونى هو النسبة بين ....

الحل

قوة الاحتكاك النهائى و رد الفعل العمودى

(٢) إذا اثرت القوة $\overleftarrow{\text{ق}} = ٢\ \overleftarrow{\text{س}} - \overleftarrow{\text{ص}} + ٥\ \overleftarrow{\text{ع}}$ فى النقطة أ متجه موضعها $\overleftarrow{\text{س}} - ٣\ \overleftarrow{\text{ع}}$ فإن عزم $\overleftarrow{\text{ق}}$ بالنسبة للنقطة ب متجه

موضعها $\overleftarrow{ص} + ٣\,\overleftarrow{ع}$ يساوى ....

الحل

$\overleftarrow{أب} = \overleftarrow{س} - \overleftarrow{ص} - ٦\,\overleftarrow{ع}$

$$\overleftarrow{ج} = \overleftarrow{أب} \times \overleftarrow{ق} = \begin{vmatrix} \overleftarrow{س} & \overleftarrow{ص} & \overleftarrow{ع} \\ ١ & -١ & -٦ \\ ٢ & -١ & ٥ \end{vmatrix} = -١١\,\overleftarrow{س} - ١٧\,\overleftarrow{ص} + \overleftarrow{ع}$$

(٣) قوتان متوازيتان متحدا الاتجاه مقدار احداهما ضعف مقدار الأخرى و مقدار محصلتهما ٣٩ نيوتن فإن مقدار اصغرهما يساوى ....

الحل

بفرض أن : مقدار الصغرى = ق ∴ مقدار القوة الكبرى = ٢ ق

، ∵ القوتان متوازيتان متحدا الاتجاه

∴ ح = ق + ٢ ق ∴ ٣٩ = ٣ ق و منها : ق = ٣ نيوتن

(٤) إذا كونت القوتان $\overleftarrow{ق_1} = أ\,\overleftarrow{س} + ٥\,\overleftarrow{ص}$ ، $\overleftarrow{ق_2} = ٣\,\overleftarrow{س} - ب\,\overleftarrow{ص}$ ازدواج فإن : أ + ب = ...

الحل

∵ $\overleftarrow{ق_1}$ ، $\overleftarrow{ق_2}$ تكونان ازدواج ∴ $\overleftarrow{ق_1} = -\overleftarrow{ق_2}$

∴ $أ\,\overleftarrow{س} + ٥\,\overleftarrow{ص} = -٣\,\overleftarrow{س} + ب\,\overleftarrow{ص}$

∴ أ = -٣ ، ب = ٥ ∴ أ + ب = ٢

(٥) الشرط اللازم و الكافى لاتزان مجموعة من القوى المستوية هو ....

الحل

ينعدم متجه مجموع القوى ، ينعدم عزم المجموعة بالنسبة لنقطة واحدة

(٦) يقع مركز ثقل الجسم الجاسئ المعلق تعليقاً حراً على الخط المستقيم الرأسى المار بـ ....

الحل

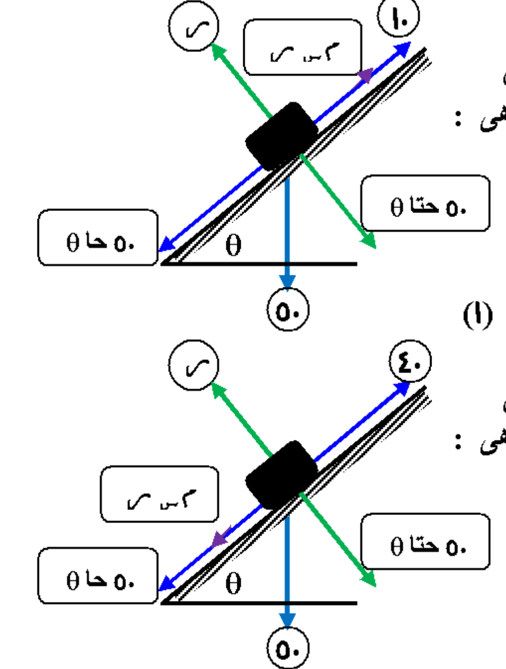
نقطة التعليق

ثانياً : أجب عن ثلاثة أسئلة فقط مما يلى :

السؤال الثانى :

(أ) وضع جسم وزنه ٥٠ نيوتن على مستوى يميل على الأفقى بزاوية قياسها θ ، فإذا كان أقل و أكبر قوة موازية لخط أكبر ميل و تجعل الجسم متزناً على المستوى هما ١٠ ، ٤٠ نيوتن على الترتيب اوجد معامل الاحتكاك و قياس زاوية ميل المستوى على الأفقى

الحل



فى الحالة الأولى (أقل قوة)

القضيب يكون على وشك الحركة لأسفل

∴ من الشكل المقابل معادلات الاتزان هى :

١٠ + م س ر = ٥٠ جا θ

، ر = ٥٠ جتا θ

∴ ١٠ + ٥٠ م جتا θ = ٥٠ جا θ

∴ ٥٠ م جتا θ = ٥٠ جا θ − ١٠ (١)

فى الحالة الثانية (أكبر قوة)

القضيب يكون على وشك الحركة لأعلى

∴ من الشكل المقابل معادلات الاتزان هى :

٤٠ = م س ر + ٥٠ جا θ

، ر = ٥٠ جتا θ

∴ ٤٠ = ٥٠ م جتا θ + ٥٠ جا θ

بالتعويض من (١) ينتج :

٤٠ = ٥٠ حا θ − ١٠ + ٥٠ حا θ   و منها ينتج :

∴ ٥٠ = ١٠٠ حا θ   ∴ حا θ = $\frac{١}{٢}$ ∴ θ = ٣٠°

∴ ر = ٥٠ حتا ٣٠° = ٥٠ × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ = ٢٥ $\sqrt{٣}$ نيوتن ،

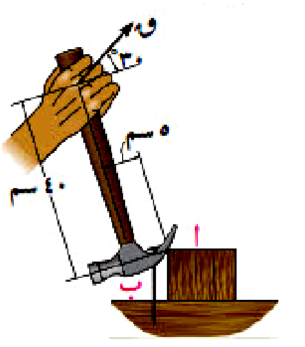
م س × ٢٥ $\sqrt{٣}$ = ٥٠ × $\frac{١}{٢}$ − ١٠

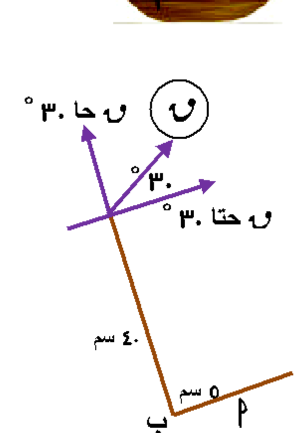
∴ م س × ٢٥ $\sqrt{٣}$ = ١٥   و منها : م س = $\frac{١}{٥}$ $\sqrt{٣}$

(٢) الشكل المقابل :

يوضح القوة ق اللازمة لنزع مسمار عند ب ، إذا كان معيار عزم القوة حول نقطة أ اللازمة لنزع المسمار يساوى ٢٠٠ نيوتن . سم

اوجد معيار القوة ق





الحل

∵ ع أ = ق حتا ٣٠° × ٤٠ + ق حا ٣٠° × ٥

∴ ٢٠٠ = ق × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ × ٤٠ + ق × $\frac{١}{٢}$ × ٥

∴ ٢٠٠ = (٤٠ $\sqrt{٣}$ + ٥) ق

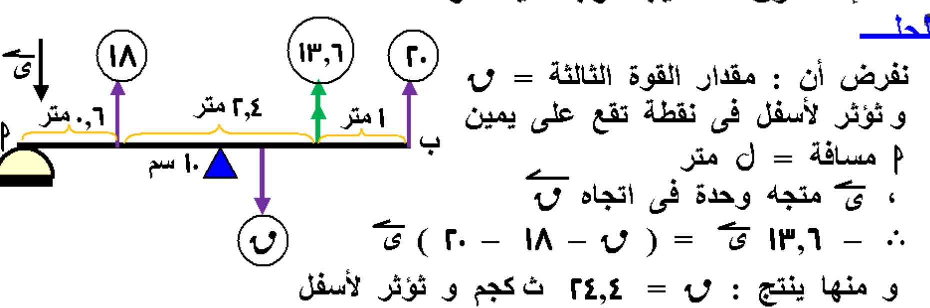
و منها : ق = ٥,٤ نيوتن

السؤال الثالث :

(أ) إذا كانت محصلة ثلاث قوى تؤثر على القضيب أ ب مهمل الوزن فى الشكل المقابل هى ١٣,٦ ث كجم و تؤثر لأعلى فى نقطة تبعد ٣ متر على يمين أ

اوجد مقدار و اتجاه و نقطة تأثير القوة الثالثة فإذا اتزن القضيب اوجد قيمة و

الحل



نفرض أن : مقدار القوة الثالثة = ق

و تؤثر لأسفل فى نقطة تقع على يمين أ مسافة = ل متر

، ى متجه وحدة فى اتجاه ق

∴ − ١٣,٦ ى = (ق − ١٨ − ٢٠) ى

و منها ينتج : ق = ٢٤,٤ ث كجم و تؤثر لأسفل

، ∵ ع أ = عزم المحصلة حول أ

∴ ٢٠ × ٤ + ١٨ × ٠,٦ − ٢٤,٤ × ل = ١٣,٦ × ٣

و منها ينتج : ل = ٢,٠٥ متر

(٢) أ ب حـ ء مستطيل فيه أ ب = ١٢ سم ، ب حـ = ٩ سم ، م ∈ ب حـ بحيث ب م = ٤ سم أثرت قوى مقاديرها ق١ ، ٥ $\sqrt{١٠}$ ، ٢٦ ، ق٢ ، ١٨ نيوتن فى اتجاهات ب أ ، أ م ، م ء ، ء حـ ، ء أ على الترتيب فإذا كانت مجموعة القوى متزنة أوجد قيمتى ق١ ، ق٢

الحل

من هندسة الشكل : ب ء = ١٣ سم

∵ مجموعة القوى متزنة

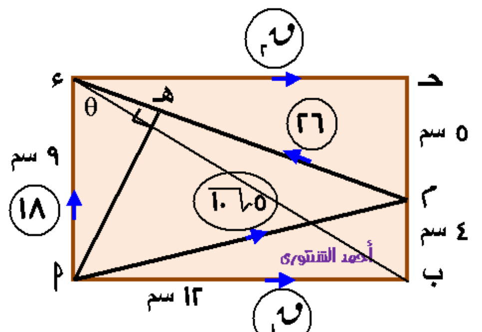
∴ $ج_{م}$ = ٠

∴ $ق_{٢}$ × ٩ − ٢٦ × أ هـ = ٠

∴ $ق_{٢}$ × ٩ = ٢٦ × ٩ جا θ

∴ $ق_{٢}$ × ٩ = ٢٦ × ٩ × $\frac{١٢}{١٣}$

و منها : $ق_{٢}$ = ٢٤ نيوتن



، $ج_{م}$ = ٠ ∴ ١٨ × ١٢ − $ق_{١}$ × ٤ − $ق_{٢}$ × ٥ = ٠

∴ ١٨ × ١٢ − ٢٤ × ٤ − $ق_{٢}$ × ٥ = ٠ و منها : $ق_{١}$ = ٢٤ نيوتن

السؤال الرابع :

(أ) أ ب سلم منتظم طوله ٥ متر و وزنه ٢٠ ث كجم يستند بطرفه أ على حائط رأسى أملس و بطرفه ب على أرض أفقية خشنة معامل الاحتكاك بينهما $\frac{١}{٤}$ ، و كان الطرف ب على بعد ٣ متر من الحائط ، اثبت أن السلم لا يمكن أن يتزن في هذه الحالة ثم اوجد اصغر وزن لجسم معامل الاحتكاك بينه و بين الأرض $\frac{١}{٥}$ بحيث إذا وضع عند الطرف ب للسلم يمنعه من الانزلاق

الحل

من هندسة الشكل : أ حـ = ٣ سم

بفرض أن السلم متزن :

∴ $ر_{أ}$ = ح ، $ر_{ب}$ = ٢٠

، $ج_{ب}$ = ٠

∴ ٢٠ × ١,٥ − $ر_{أ}$ × ٤ = ٠

و منها : $ر_{أ}$ = ٧,٥ ∴ ح = ٧,٥

، ∵ مقدار $ح_{س}$ عند ب = م $ر_{ب}$ = $\frac{١}{٤}$ × ٢٠ = ٥

∴ ح > $ح_{س}$ و بالتالى لا يمكن أن يتزن السلم فى هذه الحالة

بعد وضع الجسم الذى وزنه (و) عند ب

بالنسبة للجسم :

ض = $\frac{١}{٥}$ ر

، و = ر

∴ ض = $\frac{١}{٥}$ و

بالنسبة للسلم :

$ر_{أ}$ = $\frac{١}{٤}$ $ر_{ب}$ + $\frac{١}{٥}$ و ، $ر_{ب}$ = ٢٠

، $ج_{ب}$ = ٠ ∴ ٢٠ × ١,٥ − $ر_{أ}$ × ٤ = ٠ ∴ $ر_{أ}$ = ٧,٥

∴ ٧,٥ = $\frac{١}{٤}$ × ٢٠ + $\frac{١}{٥}$ و و منها : و = ١٢,٥ ث كجم

(٢) سلك منتظم طوله ١٠٠ سم ثنى على هيئة خمسة أضلاع من مسدس منتظم أ ب حـ ء هـ و بدأ من نقطة أ ، عين بعد مركز ثقله عن مركز المسدس ، و إذا علق السلك تعليقاً حراً من طرفه أ عين قياس زاوية ميل $\overline{أ ب}$ على الرأسى فى وضع التوازن

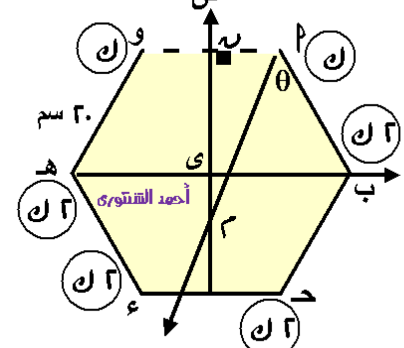
الحل

طول كل ضلع = ١٠٠ ÷ ٥ = ٢٠ سم

بأخذ الاتجاهين المتعامدين $\overrightarrow{ى س}$ ، $\overrightarrow{ى ص}$

و بفرض أن كل كتلة عند كل ضلع = ٢ ك و تؤثر فى منتصف كل منها و توزع عند كل رأس

فتكون الكتل و احداثياتها كما بالجدول التالى :



	عند أ	عند ب	عند حـ	عند ء	عند هـ	عند و
الكتلة	ك	٢ ك	٢ ك	٢ ك	٢ ك	ك
س	١٠	٢٠	١٠	− ١٠	− ٢٠	− ١٠
ص	١٠ $\sqrt{٣}$	٠	− ١٠ $\sqrt{٣}$	− ١٠ $\sqrt{٣}$	٠	١٠ $\sqrt{٣}$

و من الجدول نجد :

س$_م$ = $\frac{\text{ك × ١٠ + ٢ك × ٢٠ + ٢ك × ١٠ − ٢ك × ١٠ − ٢ك × ٢٠ − ك × ١٠}}{\text{١٠ك}}$ = ٠

ص$_م$ = $\frac{\text{ك × ١٠}\sqrt{٣}\text{ − ٢ك × ١٠}\sqrt{٣}\text{ − ٢ك × ١٠}\sqrt{٣}\text{ . − ك × ١٠}\sqrt{٣}}{\text{١٠ك}}$ = − ٢ $\sqrt{٣}$

∴ احداثي مركز الثقل = (٠ ، − ٢ $\sqrt{٣}$) بالنسبة لنقطة ى (مركز المسدس)

، ∵ مركز المسدس ى (٠ ، ٠)

∴ مركز ثقل السسك يبعد ٢ $\sqrt{٣}$ عن مركز المسدس عند التعليق من أ

و يكون أ م⃖ هو الخط الرأسي المار بنقطة التعليق أ

من الرسم نجد : ظا (∠ ى أ م) = $\frac{١٢\sqrt{٣}}{١٠}$ = $\frac{٦\sqrt{٣}}{٥}$

∴ ق (∠ ى أ م) = ١٨ ′ ٦٤ °

، ∵ قياس زاوية رأس المسدس = ١٢٠ °

∴ ق (∠ θ) = ١٢٠ ° − ١٨ ′ ٦٤ ° = ٤٢ ′ ٥٥ °

السؤال الخامس :

(أ) أ ب قضيب منتظم طوله ٢ متر و وزنه ٥ نيوتن ، حـ ، ء نقطتي تثليثه من جهة أ ، علق اوزان مقدارها ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ نيوتن في النقط أ ، حـ ، ء ، ب على الترتيب عين مركز ثقل المجموعة

الحل

بأخذ الاتجاهين المتعامدين أ ب⃖ و العمودي عليه

أ ـــ حـ ـــ هـ ـــ ء ـــ ب

(١) ، (٢) ، (٥) ، (٣) ، (٤)

$\frac{٢}{٣}$ م ، $\frac{١}{٣}$ م ، $\frac{١}{٣}$ م ، $\frac{٢}{٣}$ م

فيكون جدول الكتل و احداثياتها كما يلي :

	عند أ	عند حـ	عند هـ	عند ء	عند ب
الكتلة	١	٢	٥	٣	٤
س	٠	$\frac{٢}{٣}$	١	$\frac{٤}{٣}$	٢

∴ س$_م$ = $\frac{\text{١ × ٠ + ٢ × }\frac{٢}{٣}\text{ + ٥ × ١ + ٣ × }\frac{٤}{٣}\text{ + ٤ × ٢}}{\text{١ + ٢ + ٥ + ٣ + ٤}}$ = $\frac{١١}{٩}$

∴ مركز ثقل المجموعة = ($\frac{١١}{٩}$ ، ٠) بالنسبة لنقطة أ

(٢) قوتان ق⃖$_١$ = ٢ س⃖ − ص⃖ ، ق⃖$_٢$ = س⃖ − ٢ ص⃖ تؤثران في النقطتين أ (١ ، ١) ، ب (٠ ، − ٤) على الترتيب

اوجد عزم المجموعة حول أي نقطة في المستوى

الحل

∵ ق⃖$_١$ = (٢ ، − ١) ، ق⃖$_٢$ = (− ٢ ، ١) ∴ ق⃖$_١$ = − ق⃖$_٢$

∴ ق⃖$_١$ // ق⃖$_٢$ و تضادها في الاتجاه ، ‖ ق⃖$_١$ ‖ = ‖ ق⃖$_٢$ ‖

∴ المجموعة تكون ازدواج

، ج⃖$_و$ = و أ⃖ × ق⃖$_١$ + و ب⃖ × ق⃖$_٢$

= (١ ، ١) × (٢ ، − ١) + (٠ ، − ٤) × (− ٢ ، ١)

= − ٣ ع⃖ − ٨ ع⃖ = − ١١ ع⃖